Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning 1, 25/01/2006, Tid: 10.15-11.15

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL
.

---

1) Beskriv ytan $x^2 - x + y^2 - z^2 = -3$, genom att ange dess namn och en skiss.

2) Undersök om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 y}{(x-1)^4 + y^2}$$

existerar.

3) Beräkna alla andraderivator till funktionen

$$f(x,y) = \log(xy + x^2 - y^2).$$

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 1, 25/01/2006

Lösning: Börja med att kvadrera de termer med x-varaibel, och ytan skrivs om

$$(x-1/2)^2+y^2-z^2=\frac{-11}{4}.$$

Ytan kan enkelt skisseras och det visar sig att den är en tvaamantlad hyperboloid.

2) Eftersom nämnaren har ett nollställe i punkten $(1,0)$ så kan det lätt bli problem i den punkten. Vi provar först med $y=k(x-1)$ och då får vi

$$f(x,k(x-1))=\frac{(x-1)^2k(x-1)}{(x-1)^4+k(x-1)^2}\ \to\ 0 \qquad \text{då } x\to 1.$$

Frågan är om detta värde gäller som ett gräensvärde! Låt oss prova $y=(x-1)^2$. Vi får

$$f(x,(x-1)^2)=\frac{(x-1)^2(x-1)^2}{(x-1)^4+(x-1)^4}=\frac{1}{2},$$

och därmed har vi att funktionen har inget gränsvärde i punkten $(1,0)$.

Lösning: Derivering ger

$$f_x=\frac{y+2x}{xy+x^2-y^2}, \qquad f_y=\frac{x-2y}{xy+x^2-y^2}.$$

$$f_{xx}=\frac{2(xy+x^2-y^2)-(y+2x)(y+2x))}{(xy+x^2-y^2)^2}=\frac{-2xy-2x^2-3y^2}{(xy+x^2-y^2)^2},$$

$$f_{yy}=\frac{2xy-3x^2-2y^2}{(xy+x^2-y^2)^2}=$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{4xy-x^2+y^2}{(xy+x^2-y^2)^2}.$$