Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 2, 13/02/2006,
Tid: 10.15-11.15

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL
.

---

1) Givet är ekvationssystemet

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \qquad xy + yz = 2,$$

Genom att tillämpa implicitafunktionssatsen visa att x kan skrivas som en funktion av z, kring punkten $(1, 1, 1)$. Bestäm även $x'(1)$.

2) Bestäm största värdet hos funktionen $f(x, y) = x^2 - xy + y$ då

$$x^2 + y \leq 2, \qquad y \geq 0, \qquad x \geq 0.$$

3) Bestäm största värdet för funktionen $f(x, y) = xy$ under bivillkoret $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 2, 13/02/2006

1) Se detta som en avbildning

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$$

med $\mathbf{f} = (F, G) = (x^2+y^2+z^2-3, 2-xy-yz)$. Enligt Implicita funktionssatsen ska vi betrakta Jakobianen till $\mathbf{f}$ i den aktuella punkten $(1, 1, 1)$:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -y+x & -x-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Alltså implicita funktionssatsen ger att x (och även y) kan skrivas som funktion(er) av z nära punkten $(1, 1, 1)$.

2) Låt D beteckna det aktuella området. Eftersom funktionen är deriverbar, så tittar vi bara på punkter där $\nabla f = 0$ och sen randpunkter. Derivering ger

$$\nabla f = 0 \qquad (2x - y, -x + 1) = (0, 0)$$

som har lösningen $(1, 2)$. Denna punkt ligger dock inte i området. Vi har tre olika randstycken:
I) $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$. då är $f = y$ och maximum fås då $y = 2$, och maxvärdet är $f = 2$.
II) $y = 0$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$. då är $f = x^2$ och maximum fås då $x = \sqrt{2}$, och maxvärdet är $f = 2$.
II) $y = 2 - x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$. då är $f = x^3 - 2x + 2$ och maximum fås då $df(x, 2 - x^2)/dx = 0$, eller på randen av intervallet $(0, \sqrt{2})$ för x-variabeln. Vi får således $df(x, 2 - x^2)/dx = 3x^2 - 2 = 0$ som ger $x = \sqrt{2/3} \geq 0$ (andra negativa lösningen förkastas). Vidare är funktionens värde i den punkten $2 - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} < 2$. På randen av intervallet $(0, \sqrt{2})$ har vi värdena 0 och 2. Maxvärdet för funktionen är 2.

3) Sätt bivillkoren $g(x, y) = x^2 - 2x + y^2$. Då har vi enligt Lagrange Multiplikator metod att

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

vilket ger

$$(y, x) = \lambda(2x - 2, 2y).$$

Detta (tillsammans med bivilkoret $g = 0$) kan lösas. Vi får

$$\frac{y}{x-1} = 2\lambda = \frac{x}{y}$$

som ger $y^2 = x^2 - x$. Tillsammans med $g = x^3 - 2x + y^2 = 0$ ger att $x = 0$, eller $x = 1 \pm \sqrt{5}/2$. Dessa ger motsvarande y värdena

$$(x, y) = (0, 0), \qquad (x, y) = (1 \pm \sqrt{5}/2, 1), \qquad (x, y) = (1 \pm \sqrt{5}/2, -1).$$

Eftersom kurvan $g = 0$ är en sluten mängd så antas både max och min på kurvan. Vi har därför att max/min värden är

$$f(1 + \sqrt{5}/2, 1) = \left(1 + \sqrt{5}/2\right).$$