Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 3, 27/02/2006,
Tid: 10.15-11.15

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL
.

---

1) Beräkna dubbelintegralen

$$\int\int_D xy(x^2 - y^2)dxdy,$$

då

$$1 < xy < 2, \qquad 1 < x - y < 2.$$

2) Beräkna dubbelintegralen

$$\int\int_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}dxdy,$$

då

$$D = \{(x,y) \;:\; x^2 + y^2 < 1\}.$$

3) Beräkna trippelintegralen

$$\int\int\int_K (x^2 + y^2 - z^2)dxdydz,$$

då

$$K = \{(x,y) \;:\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 3, 27/02/2006

1) Sätt $u = xy$ och $v = x - y$. Vi har då

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = -(y+x)^{-1}$$

$$\int\int_D xy(x^2-y^2)dxdy = \int\int_D xy(x-y)(x+y)dxdy =$$

$$= \int_1^2\int_1^2 uv(x+y)\frac{1}{x+y}dudv = \int_1^2\int_1^2 uvdudv = 9/4.$$

2) Använd polära koordinater

$$\int\int_D \frac{(x+y)^2}{1+x^2+y^2}dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{(r\cos\theta + r\sin\theta)^2}{1+r^2}rdrd\theta =$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2}dr\right)\left(\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)^2 d\theta\right) = \cdots = \pi(1-\ln 2),$$

3) Inför sfäriska koordinater och att $x^2+y^2 = r^2 - z^2$

$$\int\int\int_K (x^2+y^2-z^2)dxdydz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(r^2 - 2r^2\cos^2\phi)r^2\sin\phi drd\theta d\phi = \cdots = 4\pi/15,$$