Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 4, 20/03/2006,

Tid: 10.15–11.30

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL
.

---

1) Bestäm mantelarean hos den yta S som alstras då kurvan

$$(x, y) = (t, t^2), \qquad 0 \le t \le 1,$$

roterar ett varv kring y-axelan. (Obs, ändrad version.)

2) Bestäm hastighetsvektor, accelerationsvektor samt krökningen för kurvan

$$\mathbf{r} = (t, t^2, t^2 - t),$$

i punkten $(1, 1, 0)$.

3) Bestäm ekvationen för kraftlinjen (flödeslinjen) för en partikel som går genom punkten i $(x, y) = (1, 1)$ i fältet $\mathbf{F} = (1, 2x)$.
Ledning: $\mathbf{r}' = \lambda \mathbf{F}$

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 4, 20/03/2006

1) Arean ges av

$$2\pi \int_0^1 |f(t)|\sqrt{(f')^2 + (g')^2}dt,$$

med $f(t) = t$ och $g(t) = t^2$ och vi får

$$2\pi \int_0^1 t\sqrt{1 + 4t^2}dt = \pi/6 \left[(1 + 4t^2)^{3/2}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi 5^{3/2}}{6}.$$

2) Vi har

$$\mathbf{r}' = (1, 2t, 2t - 1), \qquad \mathbf{v} = \mathbf{r}'' = (0, 2, 2).$$

Krökningen ges av

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{3}{(8t^2 - 4t + 2)^{3/2}}.$$

3) Vi har $\mathbf{F}$ är parallell med $\mathbf{r}'$ och därmed $dx/dt = \lambda(t)F_1$ och $dy/dt = \lambda(t)F_2$. Vi kan eliminera λ och få

$$F_2\frac{dx}{dt} = F_1\frac{dy}{dt},$$

och insättning ger $2xdx/dt = dy/dt$ och integration ger

$$x^2 = y + K$$

för ngt konstant K Eftesom kurvan ska passera punkten $(1, 1)$ så har vi $K = 0$, och kurvan är $y = x^2$.