Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 5, 27/03/2006, Tid: 10.15–11.30

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9. Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL

.

---

1) Definiera begreppet konservativt vektorfält. Bestäm talet a nedan så att vektorfältet $\mathbf{F} = (x, az, y - e^z)$ blir konservativt.
Obs! Potentialfunktionen måste bestämmas

2) Beräkna linjeintegralen $\int_C x^2 dx - xy^2 dy$ då C är kurvan som går från $(0,0)$ till $(1,1)$ längs $y = x^3$.

3) Låt ett vektorfält vara givet genom $\mathbf{F} = \nabla f + (1, y)$ där $f(0,0) = 0$, och $f(3,1) = 1$. Bestäm det arbete som utförs då en partikel rör sig längs kurvan $(3t^2, t)$ från punkten $(0,0)$ till $(3,1)$.

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 5, 27/03/2006

1) Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är konservativt om $\mathbf{F} = \nabla f$ för ngn funktion f.
För att bestämma a så har vi

$$f_x = x, \qquad f_y = az, \qquad f_z = y - e^z.$$

Och integration ger $f = x^2/2 + g(y,z)$. Derivera map y och få $f_y = g_y = az$. Integrera igen och få $g = azy + h(z)$. Derivera map z och få $g_z = ay + h_z = y - e^z$. Alltså $h_z = -e^z$ och $a = 1$, och $h = -e^z + K$. Alltså för $a = 1$ har vi en potentialfunktion

$$f(x,y,z) = x^2/2 + yz - e^z + K$$

och därmed är $\mathbf{F}$ konservativt.

2) Vi har $y = x^3$ och $dy = 3x^2dx$ och

$$\int_0^1 x^2dx - xx^6(3x^2)dx = \int_0^1 (x^2 - 3x^9)dx = 1/3 - 3/10 = 1/30.$$

3)

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} + \int_C (1,y)d\mathbf{r} = \int_0^1 df(\mathbf{r})/dt + \int_0^1 (1,y)d\mathbf{r}'dt = f(3,1) - f(0,0) + \int_0^1 7tdt - 5/2.$$