Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 6, 24/04/2006,
Tid: 10.15–11.30

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL

---

1) Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (y, z, x)$, genom ytan

$$S = \{(x, y, z) : \ z + x^2 + y^2 = 5, \ z > 1\},$$

då ytan är orienterad så att normalen är riktad uppåt i z-riktningen.

2) Bestäm **div**, och **rot** av vektorfältet $\mathbf{F} = (xy, z^2, zx)$. I vilka punkter är fältet divergens- och rotationsfri?

3) Tillämpa Greens sats för att beräkna

$$\int_C (2xy^2 + y^2)dx + (2yx^2 + 2yx)dy,$$

där C är en enkel kurva i övre halvplanet $\{(x, y) : \ y > 0\}$ och som har sina ändpunkter i $(0, 0)$, respektive $(1, 0)$.

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 6, 24/04/2006

1) Normalen till ytan blir $\mathbf{n} = (2x, 2y, 1)$. Använder vi att $z = 5 - x^2 - y^2$ på ytan, så får

$$\text{Flödet } = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int_D (y, (5 - x^2 - y^2), x) \cdot (2x, 2y, 1) dxdy =$$

$$\int\int_D (2xy + 2y(5 - x^2 - y^2) + x) dxdy = \int\int_D (2xy + 10y - 2yx^2 - 2y^3 + x) dxdy,$$

där D är projektionen av ytan i xy-planet, dvs $D = \{x^2 + y^2 = 5 - z \leq 5 - 1 = 4\}$. Alltså

$$\text{Flödet } = 0,$$

antingen genom kalkyl, eller att alla involverade funktioner är udda, i antingen x eller, y, och att integrationsområdet är symmetriskt.

2)

$$\textbf{div } \mathbf{F} = y + 0 + x = y + x, \qquad \textbf{rot } \mathbf{F} = (-2z, 0, -x).$$

Vi har att **div F** $= 0$ då $x = -y$, och att **rot F** $= \mathbf{0}$ då $x = z = 0$. Dvs punkter där fältet är divergens- och rotationsfri?

3) Vi sluter kurvan genom att lägga till segmentet

$$C_1 = \{(x, 0),\ 0 < x < 1\}.$$

Vi har

$$\int_C = \int_{C+C_1} - \int_{C_1} = I_1 - I_2$$

Nu kan vi använda Greens sats på I_1 och en enkel kalkyl på I_2.

$$I_1 = \int_{C+C_1} (2xy^2 + y^2)dx + (2yx^2 + 2yx)dy =$$

$$\int\int_D \Big(\partial_x(2yx^2 + 2yx) - \partial_y(2xy^2 + y^2)\Big)\, dxdy = 0,$$

där D är det område som omsluts av $C + C_1$.

Nu är

$$I_1 = \cdots = 0$$

då $y = 0$ på C_1.

Svar: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.