Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Lappskrivning # 7, 03/05/2006, Tid: 10.15–11.30

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. INGA TILLÅTNA HJÄLPMEDEL
.

---

1) Hur stor är totalflödet genom en sluten yta hos ett vektorfält som är divergensfri? Hur stor blir totalflödet om divergensen är konstant K?

2) Beräkna ytintegralen

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

då $\mathbf{F} = (-y + 2z^2, z\sin(x), z)$, och ytan S är övre halvan av enhetssfären.
Använd divergenssatsen! Obs: Ytan ej sluten!

3) Bestäm värdet på linjeintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ då $\mathbf{F}$ är ett vektorfält med $\mathbf{RotF} = (1, 0, 0)$ och C är den kurva som vi får genom skärningen mellan ytorna:

$$x^2 + z^2 = 1, \qquad z - 2y + x - 1 = 0.$$

Obs! Stokes sats.

Lycka till

Lösningsförslag till Lappskrivning 7, 03/05/2006

1) Enligt divergenssatsen, kan integralen gå över till en trippel integral över kroppen för divergensen hos vektorflödet. Om det senare är noll (div. fri) så är intgralen noll, och det som flöder in flöder också ut. I fallet div. blir konstant K så är svaret $K\times$(kroppens volym).

2) Vi behöver en sluten yta för att använda Div. satsen. Slut till ytan med enhetsskivan D i xy-planet, och låt I beteckna vår ytintegral. Vi har

$$I = \int\int_{S+D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \int\int_{D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = I_1 - I_2.$$

Eftersom $\mathbf{F} = (y, 0, 0)$ på D och att $d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS = (0, 0, -1)dS$ så är $I_2 = 0$. Integralen I_1 kan nu beräknas med hjälp av div-satsen

$$I = I_1 = \int\int\int_K \textbf{div } \mathbf{F} dS = \int\int\int_K 1 dS =$$

$$= \texttt{volymen}(K) = \frac{1}{2}(4\pi/3) = 2\pi/3,$$

dvs halva volymen av enhetsklottet.

3) Använd Stokes sats och få att

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_S \mathbf{RotF}\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S (1, 0, 0)\cdot d\mathbf{S} = \int\int_S N_1 dS,$$

där N_1 är första komponenten i enhetsnormalen $\mathbf{N} = (1, -2, 1)/\sqrt{6}$ till ytan

$$S: \ z - 2y + x - 1 = 0.$$

Vilket ger $N_1 = 1/\sqrt{6}$.

Alltså integralen

$$\int\int_S N_1 \ dS = (1/\sqrt{6})\int\int_S 1 \ dS = \sqrt{1/6}\times \text{Area}(S),$$