Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar med LÖSNINGAR på determinanter, ht 06.

1. Bestäm samtliga värden på det reella talet a för vilka det homogena systemet nedan har icketriviala lösningar.
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$$

2. Beräkna determinanten
$$\begin{vmatrix} 83 & 84 & 85 & 86 \\ 84 & 85 & 86 & 87 \\ 17 & 17 & 17 & 18 \\ 87 & 88 & 89 & 90 \end{vmatrix}$$

3. Använd Cramers regel för att bestämma funktioner $p(t)$ och $q(t)$ som satisfierar ekvationssystemet
$$\begin{cases} (1+t)p(t) + (2t-1)q(t) = t \\ (1-t)p(t) + tq(t) = t^2 \end{cases}$$

Lösningar

1. Systemet har icketriviala lösningar precis då determinanten av systemets koefficientmatris är lika med 0. D.v.s

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$(a-1)^2 - (a^2-1) = (a-1)^2 - (a-1)(a+1) = (a-1)(a-1-(a+1)) = (a-1)(-2).$$

Således endast när $a = 1$ så har systemet icketriviala lösningar.

2. Vi subtraherar rad ett från rad två och rad fyra. Detta ändrar ej värdet på determinanten.

$$\begin{vmatrix} 83 & 84 & 85 & 86 \\ 84 & 85 & 86 & 87 \\ 17 & 17 & 17 & 18 \\ 87 & 88 & 89 & 90 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 83 & 84 & 85 & 86 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 17 & 17 & 17 & 18 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Sen bryter vi ut talet 4 från rad fyra. Eftersom den determinant vi då får har två rader lika är värdet lika med noll.

$$\begin{vmatrix} 83 & 84 & 85 & 86 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 17 & 17 & 17 & 18 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 83 & 84 & 85 & 86 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 17 & 17 & 17 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Enligt Cramers regel får vi

$$p(t) = \frac{\begin{vmatrix} t & 2t-1 \\ t^2 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+t & 2t-1 \\ 1-t & t \end{vmatrix}} = \frac{t^2 - t^2(2t-1)}{t(1+t) - (1-t)(2t-1)} = \frac{2t^2 - 2t^3}{3t^2 - 2t + 1}$$

och

$$q(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1+t & t \\ 1-t & t^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+t & 2t-1 \\ 1-t & t \end{vmatrix}} = \frac{t^2(1+t) - t(1-t)}{t(1+t) - (1-t)(2t-1)} = \frac{t^3 + 2t^2 - t}{3t^2 - 2t + 1}$$