Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar och svar till några övningar på egenvärden och egenvektorer inför lappskrivning nummer 6 för D1, ht 06.

OBS Några av uppgifterna nedan är kanske svårare än den uppgift som kommer på lappskrivningen nästa onsdag.

1. Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer för matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 0 \\ -2 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösning

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 9-\lambda & 4 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(-1)((9-\lambda)(2-\lambda)-8) = \lambda(-1)(\lambda^2 - 11\lambda + 10)$$

Denna ekvation har rötterna 0, 1 och 10. Vi Löser nu systemet

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

för dessa värden på λ. Vi får egenrummen $E_0 = span\{(1,0,-1)\}$, $E_1 = span\{(2,-1,2)\}$ och $E_{10} = span\{(1,4,1)\}$.

Matrisen B har egenrummen $E_{-1} = span\{(1,0,1)\}$, $E_0 = span\{(-1,1,1)\}$ och $E_3 = span\{(1,2,-1)\}$

Matrisen C har egenrummen $E_0 = span\{(0,0,1)\}$, $E_{10} = span\{(2,1,0)\}$ och $E_{15} = span\{(1,-2,0)\}$

2. Gör en s.k. ortogonal diagonalisering av matrisen

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning:

$$0 = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 1-\lambda & -8 \\ 4 & -8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -9+\lambda \\ 4 & -8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(9-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ 8 & -7-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} = (9-\lambda)[(7-\lambda)(-7-\lambda)-32] = (9-\lambda)[\lambda^2 - 81]$$

ger egenvärdena $\lambda = 9$ (dubbelrot) och $\lambda = -9$. Tillhörande ortogonalbas av egenvektorer t ex

till $\lambda = -9$: $e_1 = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$
till $\lambda = 9$: $e_2 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$ och $e_3 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$.

Diagonaliseringen blir således

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$$

3. Bestäm A^n när
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning Matrisen A har egenvärden 1 och 2 med tillhörande egenvektorer $(2, -1)$ respektive $(3, -1)$. Med
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
så får vi att
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1},$$
varur vi sluter att
$$A^n = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

OBSERVERA Eftersom matrisen inte är symmetrisk kan vi inte göra en s k ortogonal diagonalisering.

4. En symmetrisk 3×3-matris har egenvärdena -1, -1 och 1. En egenvektor hörande till egenvärdet 1 är $(0, -1, 1)^T$. Bestäm matrisen A.

Lösning: Matrisens övriga egenvektorer bildar, eftersom matrisen är symmetrisk ett egenrum E_{-1} som ligger ortogonalt mot vektorn $(0, 1, -1)$ *eftersom matrisen förutsattes vara symmetrisk.* (*eller någon annan vektor parallell med* $(0, -1, 1)$. *Det gäller att varje multipel* $\lambda(0, -1, 1)$ *av* $(0, -1, 1)$ *också är en egenvektor hörande till egenvärdet 1.*) Egenrummet E_1 har dimension 1 eftersom 1 är ett enkelt nollställe till karaktersitiska ekvationen. Vektorerna $(1, 0, 0)$ och $(0, 1, 1)$ tillhör E_{-1} (*Vi kan ta vilka två icke parallella vektorer som helst som är ortogonala mot* $(0, -1, 1)$. *Istället för* $(1, 0, 0)$ *och* $(0, 1, 1)$ *hade vi t ex kunnat välja* $(1, 1, 1)$ *och* $(2, 1, 1)$.) Vi har nu att för den linjära avbildning som A representerar gäller

$$A(1, 0, 0) = (-1, 0, 0), \quad A(0, 1, 1) = (0, -1, -1) \quad A(0, 1, -1) = (0, 1, -1).$$

Detta ger, *t ex med Martins metod*, $A(0, 2, 0) = (0, -1, -1) + (0, 1, -1) = (0, 0, -2)$ och $A(0, 0, 2) = (0, -1, -1) - (0, 1, -1) = (0, -2, 0)$. Alltså $A(0, 1, 0) = (0, 0, -1)$ och $A(0, 0, 1) = (0, -1, 0)$. Således

SVAR:
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alternativt har vi
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

som uträknat blir som svaret ovan.

5. Matrisen $\mathbf{A}$ har egenvektorerna $(1,2,-1)$, $(2,1,1)$ och $(1,0,1)$ hörande till egenvärdena 2, 3, -1 respektive. Bestäm $\mathbf{A}(4\ 3\ 1)^T$.

   Lösning: Vi skriver först vektorn $(4,3,1)$ som en linjärkombination av egenvektorerna:

$$(4,3,1) = x_1(1,2,-1) + x_2(2,1,1) + x_3(1,0,1)$$

   Man finner att $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ och $x_3 = 1$. Dvs

$$(4,3,1) = (1,2,-1) + (2,1,1) + (1,0,1)$$

   Vi applicerar nu matrisen $\mathbf{A}$ och får då:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. Matrisen $\mathbf{A}$ är symmetrisk och har bl a egenvektorerna $(1,1,1)$ och $(1,-2,-1)$. Bestäm samtliga egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$.

   Lösning: Då matrisen är symmetrisk så är egenvektorer hörande till skilda egenvärden ortogonala mot varandra. Egenvektorerna $(1,1,1)$ och $(1,-2,-1)$ är inte ortogonala mot varandra och måste då höra till samma egenvärde och spänna upp ett egenrum av dimension 2. Matrisen är uppenbarligen av formatet 3×3 och till den hör en ortogonalbas av egenvektorer. En tredje egenriktining $\bar{e}_1$ ges av en vektor ortogonal mot de givna två vektorerna t ex

$$\bar{e}_3 = (1,1,1) \times (1,-2,-1) = (1,2,-3).$$

   SVAR. $span\{(1,1,1),(1,-2,-1)\}$ resp $span\{(1,2,-3)\}$