Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på inre produktrum inför lappskrivning nummer 4 linjär algebra II, ht 06.

1. Låt $\bar{e}_1 = (2, 1, -1, -2)$ och $\bar{e}_2 = (1, 1, 1, 1)$. Då gäller att $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$. Sätt $\bar{f}_3 = (1, 1, 2, 1)$ och låt

$$\bar{e}_3 = \bar{f}_3 - proj_{span\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}}(\bar{f}_3).$$

Då

$$proj_{span\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}}(\bar{f}_3) = \tfrac{<\bar{f}_3|\bar{e}_1>}{\|\bar{e}_1\|^2}\bar{e}_1 + \tfrac{<\bar{f}_3|\bar{e}_2>}{\|\bar{e}_2\|^2}\bar{e}_2 = \tfrac{-1}{10}(2, 1, -1, -2) + \tfrac{5}{4}(1, 1, 1, 1) =$$

$$\tfrac{1}{20}(21, 23, 27, 29),$$

så får vi att

$$\bar{e}_3 = (1, 1, 2, 1) - \frac{1}{20}(21, 23, 27, 29) = \frac{1}{20}(-1, -3, 13, -9).$$

Vi hyfsar den sista vektorn genom att förlänga den med 20.

Delsvar: En ortogonal bas för L ges av vektorerna $\bar{e}_1 = (2, 1, -1, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, 1, 1, 1)$ och $\bar{e}_3 = (-1, -3, 13, -9)$.

Vi projicerar nu vektorn $\bar{u} = (1, 2, 1, 1)$ på L och använder därvid projektionslemmat.

$$proj_L(\bar{u}) = \tfrac{<\bar{u}|\bar{e}_1>}{\|\bar{e}_1\|^2}\bar{e}_1 + \tfrac{<\bar{u}|\bar{e}_2>}{\|\bar{e}_2\|^2}\bar{e}_2 + \tfrac{<\bar{u}|\bar{e}_3>}{\|\bar{e}_3\|^2}\bar{e}_3 =$$

$$\tfrac{1}{10}(2, 1, -1, -2) + \tfrac{5}{4}(1, 1, 1, 1) + \tfrac{-3}{260}(-1, -3, 13, -9) =$$

$$\tfrac{26}{260}(2, 1, -1, -2) + \tfrac{325}{260}(1, 1, 1, 1) + \tfrac{-3}{260}(-1, -3, 13, -9) =$$

$$\tfrac{1}{260}(380, 360, 260, 300) = \tfrac{1}{13}(19, 18, 13, 15).$$

För att komplettera med en fjärde vektor till en ortogonalbas för R^4 väljer vi

$$\bar{e}_4 = \bar{u} - proj_L(\bar{u}) = (1, 2, 1, 1) - \frac{1}{13}(19, 18, 13, 15) = \frac{1}{13}(-6, 8, 0, -2).$$

Vi hyfsar denna vektor genom att multiplicera med 13.

Svar: En ortogonal bas för R^4 med givna egenskaper ges av vektorerna $\bar{e}_1 = (2, 1, -1, -2)$, $\bar{e}_2 = (1, 1, 1, 1)$, $\bar{e}_3 = (-1, -3, 13, -9)$ och $\bar{e}_4 = (-6, 8, 0, -2)$.

2. Vi fann att $< (1, -1, 0) \mid (1, -1, 0) >= 0$ vilket strider mot att $< \bar{u} \mid \bar{u} > \geq 0$ för alla vektorer $\bar{u}$ och med likhet precis då $\bar{u} = \bar{0}$.

3. Med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ges minstakvadratlösningen av

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A^TA)^{-1}A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

4. Låt A vara som ovan. Den ortogonala projektionen ges då av

$$A(A^TA)^{-1}A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 39 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Svar: $\frac{1}{19}(26, 39, 39, 52)$.

Kontroll: Vektorn $(1, 2, 2, 3) - \frac{1}{19}(26, 39, 39, 52) = \frac{1}{19}(-7, -1, -1, 5)$ skall vara vinkelrät mot $(1, 2, 1, 2)$ och $(1, 1, 2, 2)$, vilket den ju är.

5. Låt

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & a & a \\ 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{14} & b \\ -1/\sqrt{42} & c & -4/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

Raderna respektive kolonnerna bildar ON-baser för R^3. Vi använder först att raderna har längd 1. Detta ger

$$1 = \| \text{ rad } 1 \|^2 = \frac{1}{3} + a^2 + a^2.$$

$$1 = \| \text{ rad } 2 \|^2 = \frac{9}{14} + \frac{1}{14} + b^2.$$

$$1 = \| \text{ rad } 3 \|^2 = \frac{1}{42} + c^2 + \frac{16}{42}.$$

Dessa ekvationer ger att a antingen är $1/\sqrt{3}$ eller $-1/\sqrt{3}$, b antingen $2/\sqrt{14}$ eller $-2/\sqrt{14}$ samt c antingen $5/\sqrt{42}$ eller $-5/\sqrt{42}$.

Vi prövar oss nu fram:

Fall 1: $a = -1/\sqrt{3}$. Då ger villkoret att rad 1 är ortogonal mot rad 2 att

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{14}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b'}{\sqrt{14}}.$$

Detta ger $b' = 4$ vilket ju strider mot att b antingen är $2/\sqrt{14}$ eller $-2/\sqrt{14}$. Detta fall är således uteslutet.

Fall 2: $a = 1/\sqrt{3}$. Då rad 1 ortogonal mot både rad 2 och rad 3 måste

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b'}{\sqrt{14}},$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{42}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c'}{\sqrt{42}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-4}{\sqrt{42}},$$

som ger $b' = -2$ och $c' = 5$.

Med $a = 1/\sqrt{3}$, $b = -2\sqrt{14}$ och $c = 5\sqrt{42}$ kommer raderna i matrisen ha längd 1 och rad 1 vara ortogonal mot rad 2 och rad 3. Man ser också att med dessa värden på b och c så blir även rad 3 och rad 2 ortogonala. Raderna bildar alltså en ON-bas. Matrisen är en ortogonal matris Q^T eftersom det då gäller att $Q^TQ = I$.

6. Låt ${}_{\mathbf{f}}\mathbf{T}_{\mathbf{e}}$ beteckna transitionsmatrisen för byte från standardbassytemet till bassystemet $\mathbf{f}$. Då gäller att

$$ {}_{\mathbf{f}}\mathbf{T}_{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbf{f}}\mathbf{T}_{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathbf{f}}\mathbf{T}_{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} $$

som vi kan sammanfatta i matrislikheten

$$ {}_{\mathbf{f}}\mathbf{T}_{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. $$

De sökta basvektorerna är kolonner i matrisen ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{T}_{\mathbf{f}}$. Då ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{T}_{\mathbf{f}} = {}_{\mathbf{f}}\ \mathbf{T}_{\mathbf{e}}^{-1}$ får vi

$$ {}_{\mathbf{e}}\mathbf{T}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

Svar: $\bar{f}_1 = (-1, 1, 1)$, $\bar{f}_2 = (0, 1, 0)$ och $\bar{f}_3 = (2, 0, 0)$.

7. Lösningsrummet består av de (x_1, x_2, x_3, x_4) sådana att

$$ (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (1, 1, -1, 1) \quad \text{och} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \perp (1, 2, 1, -7). $$

Vektorerna $(1, 1, -1, 1)$ och $(1, 2, 1, -7)$ är då ortogonala mot all vektorer i lösningsrummet. Dessa vektorer spänner alltså upp ortogonala komplementet till lösningsrummet.

Svar: $span\{(1, 1, -1, 1), (1, 2, 1, -7)\}$.