Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 3A till kursen Linjär algebra II, 5B1109, för D1 den 7/11-2006, 13.15-13.35.

Namn:

Personnummer:

Resultat: G

Lösningen räknas som godkänd om det mesta är rätt. Godkänd uppgift ger 1 bonuspoäng vid tentamensskrivning på kursen. Detta gäller ordinarie tentamenstillfället och tentamensskrivningar fram till augusti 2007.

OBS Svaret skall motiveras väl och lösningen skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Problem:

Visa att vektorerna $(1, 2, 1)$, $(4, 3, -2)$ och $(2, -1, -4)$ är linjärt beroende.

Lösning:

Vektorerna är linjärt beroende om det finns en icketrivial lösning till

$$k_1(1,2,1) + k_2(4,3,-2) + k_3(2,-1,-4) = (0,0,0), \tag{1}$$

dvs en lösning $(k_1, k_2, k_3) \neq (0,0,0)$. Ekvation (1) är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 1k_1 + 4k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 3k_2 - 1k_3 &= 0 \\ 1k_1 - 2k_2 - 4k_3 &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

som i sin tur kan skrivas om till

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

En möjlighet att undersöka om ekvation (3) har icketriviala lösningar är att beräkna systemmatrisens determinant. Om och endast om determinanten är lika med noll har systemet icketriviala lösningar.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= 1 \cdot (-12 - 2) - 2 \cdot (-16 + 4) + 1 \cdot (-4 - 6) = -14 + 24 - 10 = 0.$$

Därmed har vi visat att vektorerna $(1,2,1)$, $(4,3,-2)$ och $(2,-1,-4)$ är linjärt beroende.

En annan möjlighet är att, istället för att beräkna determinanten, helt enkelt lösa ekvationssystemet (3) med Gausselimination och bakåtsubstitution. Vi finner då

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

som har parameterlösningarna $(k_1, k_2, k_3) = t(2,-1,1)$, speciellt finns (oändligt många) icketriviala lösningar. Därmed har vi visat att vektorerna $(1,2,1)$, $(4,3,-2)$ och $(2,-1,-4)$ är linjärt beroende.