

Matematiska Institutionen
KTH

**Lösning till lappskrivning nummer 3B till kursen Linjär algebra II, 5B1109,
för D1 den 7/11-2006, 13.15-13.35.**

Namn:

Personnummer:

Resultat: G

Lösningen räknas som godkänd om det mesta är rätt. Godkänd uppgift ger 1 bonuspoäng vid tentamensskrivning på kursen. Detta gäller ordinarie tentamenstillfället och tentamensskrivningar fram till augusti 2007.

OBS Svaret skall motiveras väl och lösningen skrivs på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Problem:

Visa att vektorerna $(1, 2, -1)$, $(4, 3, 2)$ och $(2, -1, 4)$ är linjärt beroende.

Lösning:

Vektorerna är linjärt beroende om det finns en icke-trivial lösning till

$$k_1(1, 2, -1) + k_2(4, 3, 2) + k_3(2, -1, 4) = (0, 0, 0), \quad (1)$$

dvs en lösning $(k_1, k_2, k_3) \neq (0, 0, 0)$. Ekvation (1) är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 1k_1 + 4k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 2k_1 + 3k_2 - 1k_3 &= 0 \\ -1k_1 + 2k_2 + 4k_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

som i sin tur kan skrivas om till

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

En möjlighet att undersöka om ekvation (3) har icke-triviala lösningar är att beräkna systemmatrisens determinant. Om och endast om determinanten är lika med noll har systemet icke-triviala lösningar.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (12 + 2) - 2 \cdot (16 - 4) - 1 \cdot (-4 - 6) = 14 - 24 + 10 = 0. \end{aligned}$$

Därmed har vi visat att vektorerna $(1, 2, -1)$, $(4, 3, 2)$ och $(2, -1, 4)$ är linjärt beroende.

En annan möjlighet är att, istället för att beräkna determinanten, helt enkelt lösa ekvationsystemet (3) med Gausselimination och bakåtsubstitution. Vi finner då

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

som har parameterlösningarna $(k_1, k_2, k_3) = t(2, -1, 1)$, speciellt finns (oändligt många) icke-triviala lösningar. Därmed har vi visat att vektorerna $(1, 2, -1)$, $(4, 3, 2)$ och $(2, -1, 4)$ är linjärt beroende.