Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 5A till kursen Linjär algebra II, 5B1109, för D1 den 22/11-2006, 13.15-13.35.

Namn:

Personnummer:

Resultat:

Lösningen räknas som godkänd om det mesta är rätt. Godkänd uppgift ger 1 bonuspoäng vid tentamensskrivning på kursen. Detta gäller ordinarie tentamenstillfället och tentamensskrivningar fram till augusti 2007.

OBS Svaret skall motiveras väl och lösningen skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Problem:

För en linjär avbildning $T : R^2 \to R^2$ gäller att $T(1,0) = (1,2)$ och $T(0,1) = (4,3)$. Bestäm T:s bildrum och T:s nollrum. **Svar utan motivering blir ej godkänd!**

Lösning:
Låt A beteckna standardmatrisen för T. Vi har då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

T:s bildrum spänns upp av kolumnerna i A, dvs T:s bildrum är $span\{(1,2),(4,3)\}$. Eftersom de två vektorerna är linjärt oberoende spänner de upp hela R^2, så T:s bildrum är R^2.

Dimensionssatsen för linjära avbildningar (sats 8.2.3 i kursboken) ger att dimensionen för bildrummet + dimensionen för nollrummet = 2 (dimensionen för definitionsmängden).

Dimensionen för bildrummet är 2. Därmed är dimensionen för nollrummet 0, och nollrummet måste då vara nollvektorrummet, $\{\mathbf{0}\}$.

Alternativt bestämmer man nollrummet till matrisen A, dvs löser

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Direkt lösning eller undersökning av determinanten ger att endast triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ finns, vilket också ger att nollrummet till T är nollvektorrummet, $\{\mathbf{0}\}$.

Svar: T:s bildrum är R^2 och T:s nollrum är $\{\mathbf{0}\}$.