Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till några övningar på vektorrum och delrum, ht 06.

1. Är följande mängder delrum till $\mathbf{R}^3$?

   a) $U = \{(a, b, 1) |\ a, b \in \mathbf{R}\}$,

   b) $U = \{(a, b, c) |\ a + 2b - c = 0,\ a, b, c \in \mathbf{R}\}$,

   b) $U = \{(a, b, 0) |\ a^2 = b^2,\ a, b \in \mathbf{R}\}$.

   Lösning:
   Enligt sats 5.2.1 är U ett delrum till $\mathbf{R}^3$ om och endast om U är slutet under addition och skalärmultiplikation.

   a) Låt $\overline{u} = (a_1, b_1, 1)$ och $\overline{v} = (a_2, b_2, 1)$. Vi har då $\overline{u} + \overline{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 2) \notin U$, dvs ej slutet under skalärmultiplikation. På liknande sätt ser vi att U ej är slutet under skalärmultiplikation.

   Svar: Nej!

   b) Löses på samma sätt som ovan.

   Svar: Ja!

   c) Löses på samma sätt som ovan.

   Svar: Nej! Slutet under skalärmultiplikation, men ej under addition.

2. Låt M_{22} vara mängden av alla 2×2 matriser med reella matriselement. M_{22} är ett vektorrum om addition och skalärmultiplikation defineras som matrisaddition och matrisskalärmultiplikation. Är följande mängd ett delrum till M_{22}?

   Lösning:
   Löses på samma sätt som ovan.

   Svar: Ja!

$$U = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| \ a + b = c + d, a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$$

3. Låt V beteckna mängden av alla ordnade par (x, y), $x, y \in \mathbf{R}$. Definiera addition i V på samma sätt som i $\mathbf{R}^2$. Definera skalärmultiplikation in V enligt

$$k(x, y) = (ky, kx).$$

Är V ett vektorrum med dessa definitioner av addition och skalärmultiplikation?

Lösning:
Alla 10 vektorrumsaxiom måste kontrolleras. Eftersom addition är definierad på samma sätt som addition i $\mathbf{R}^2$ är Axiom 1-5 uppfyllda. Ax 6-8 är uppfyllda visar undersökning som ovan, men Ax 9-10 är ej uppfyllda.

Svar: Nej!