Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar på linjära avbildningar inför lappskrivning nummer 5, Linjär algebra II, ht 06.

OBS Några av uppgifterna nedan är kanske svårare än den uppgift som kommer på lappskrivningen nästa onsdag.

1. (a) $A(2,1,0) = A(2(1,0,0)+(0,1,0)) = 2A(1,0,0)+A(0,1,0) = (1,2,1)+(2,-1,2) = (3,1,3)$.

   (b) Kolonnerna i avbildningens matris ges av bilden av basvektorerna. Alltså blir avbildningens matris
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Nollrummet ges av de $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i R^3 sådana att $A\bar{x} = \bar{0}$ eller ekvivalent
$$\mathbf{A}\bar{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Detta ger ett homogent linjärt ekvationssystem med lösningsmängden
$$(x_1, x_2, x_3) = t(3, 1, -5) \quad t \text{ reellt tal.}$$
   Alltså nollrummet är $span\{(3,1,-5)\}$.

   (c) Vi vet att A:s bildrummet är lika med matrisen $\mathbf{A}$:s kolonnrum. Då dimensionen av nollrummet plus dimensionen av kolonnrummet till en matris är lika med antalet kolonner så får vi att dimensionen av kolonnrummet är 2. Då kolonn 1 och kolonn 2 i det 2-dimensionella kolonnrummet är linjärt oberoende så bildar de en bas för detta rum. Således är A:s bildrum lika med $span\{(1,2,1),(2,-1,2)\}$.

   (d) Se nedan.

   (e) Den ovan givna matrisen $\mathbf{A}$ är matrisen ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{e}}$. Vi använder transitionsmatriser och Martins metod för att hitta de övriga.
   Martins metod ger lätt ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \quad \text{elem. radop.} \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$
   Vi ser i tablån bilden av vektorerna $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ är $(4,2,4)$, $(2,0,2)$ respektive $(-1,3,-1)$. Därför blir matrisen ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$ lika med
$${}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
$${}_{\mathbf{e}}T_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad {}_{\mathbf{f}}T_{\mathbf{e}} = {}_{\mathbf{e}}T_{\mathbf{f}}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får

$$ {}_{\mathbf{f}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}} = {}_{\mathbf{f}}T_{\mathbf{e}}\,{}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{f}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} $$

Vi får också

$$ {}_{\mathbf{f}}\mathbf{A}_{\mathbf{e}} = {}_{\mathbf{f}}T_{\mathbf{e}}\,{}_{\mathbf{e}}\mathbf{A}_{\mathbf{e}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} $$

2. Låt A beteckna den linjära avbildning från R^3 till R^3 som består av först en spegling i planet $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ och därefter en projektion på planet $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

   (a) Bestäm matrisen för denna linjära avbildning relativt standardbasen.

   Låt S beteckna speglingen och P projektionen och låt $\mathbf{S}$ respektive $\mathbf{P}$ beteckna dessa linjära avbildningars matriser relativt standardbasen. Den sökta matrisen blir då matrisen $\mathbf{PS}$. Vi söker nu matrisen $\mathbf{S}$.

   En normalvektor till spegeln är t ex $\bar{n} = (1, 1, -2)$ och två vektorer spegeln är t ex $\bar{u} = (1, -1, 0)$ och $\bar{v} = (2, 0, 1)$. Vid spegling gäller $S\bar{n} = -\bar{n}$ 0ch $S\bar{u} = \bar{u}$ och $S\bar{v} = \bar{v}$. Martins metod ger

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim $$

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim $$

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 & 0 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) $$

   Matrisen $\mathbf{S}$ blir alltså

$$ \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} $$

   Projektionsplanets normal är $\bar{n} = (2, 1, 2)$ och två vektorer paralella med planet är t ex $\bar{u} = (1, 0, -1)$ och $\bar{v} = (1, -2, 0)$. Det gäller att $P\bar{n} = \bar{0}$ och $P\bar{u} = \bar{u}$ och $P\bar{v} = \bar{v}$. Martins metod ger då matrisen $\mathbf{P}$

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim $$

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 0 & 5 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9 & -4/9 \end{array}\right) \sim $$

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -2/9 & 8/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & -1 & 4/9 & 2/9 & -5/9 \\ 1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9 & -4/9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9 & -4/9 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 8/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -4/9 & -2/9 & 5/9 \end{array}\right) $$

Svar:

$$\mathbf{PS} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 20 & -17 & 10 \\ 8 & 14 & 14 \\ 4 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

För spegling gäller att $S \circ S\bar{v} = \bar{v}$ för alla vektorer $\bar{v}$. Den vektor som speglas på projektionsplanets normal $(2, 1, 2)$ är alltså

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

Vektorerna $(1, 0, -1)$ och $(1, -2, 0)$ ligger i planet och projiceras på sig själva. Dessa är spegelbilder av vektorerna

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

resp

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vi kan använda Martins metod för att bestämma $\mathbf{P}$ också men, för att visa på en annan metod ger vi först P:s matris relativt en ON-bas, där en av basvektorerna är en normal till planet.

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 2) \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) \quad \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{18}}(1, -4, 1).$$

Det gäller att $P\bar{f}_1 = \bar{0}$ och $P\bar{f}_2 = \bar{f}_2$ och $P\bar{f}_3 = \bar{f}_3$. Avbildningen P:s matris relativt denna bas blir då

$${}_{\mathbf{f}}\mathbf{P}_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

För transitionsmatriserna som beskriver basbytet gäller

$${}_{\mathbf{e}}T_{\mathbf{f}} = \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad {}_{\mathbf{f}}T_{\mathbf{e}} = \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T.$$

Svaret ges nu tillslut av

$${}_{\mathbf{e}}T_{\mathbf{f}}\,{}_{\mathbf{f}}\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\,{}_{\mathbf{f}}T_{\mathbf{e}}\mathbf{S} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = ?$$

(b) Nollrummet består av de vektorer som speglas på vektorer vinkelräta mot planet, dvs för vilka $S\bar{v} = (2, 1, 2)$. Vi obesrverar nu att speciellt vid spegling gäller att $S \circ S\bar{v} = \bar{v}$ så de sökta vektorerna satisfierar

$$\bar{v} = S(t(2, 1, 2)) = t\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

Så nollrummet är $span\{(7, 4, -4)\}$.

Bildrummet blir det plan på vilket vektorerna projiceras, dvs $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

3. Vi använder Martins metod

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} - & \bar{f}_1 & - & - & A\bar{f}_1 & - \\ - & \bar{f}_2 & - & - & A\bar{f}_2 & - \\ - & \bar{f}_3 & - & - & A\bar{f}_3 & - \end{array}\right) \sim \text{elem. radop} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} - & A^{-1}\bar{e}_1 & - & - & \bar{e}_1 & - \\ - & A^{-1}\bar{e}_2 & - & - & \bar{e}_2 & - \\ - & A^{-1}\bar{e}_3 & - & - & \bar{e}_3 & - \end{array}\right)$$

Vi får

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Svar: Inversa avbildningens matris relativt standardbasen blir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. För varje linjär avbildning gäller att $A\bar{0} = A0\bar{v} = 0A\bar{v} = \bar{0}$. För den givna avbildningen har vi $A(0,0,0) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$ och alltså kan den inte vara linjär.

5. (a) Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ utgöra en bas för R^4 (vilken bas som helst, spelar ingen roll.) Definiera A genom

$$A\bar{e}_1 = \bar{0}, \quad A\bar{e}_2 = \bar{0}, \quad A\bar{e}_3 = \bar{e}_1, \quad A\bar{e}_4 = \bar{e}_2$$

och

$$A(\lambda_1\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4\bar{e}_4) = \lambda_1 A\bar{e}_1 + \ldots + \lambda_4 A\bar{e}_4.$$

Då blir A en linjär avbildning och

$$A\circ A(\lambda_1\bar{e}_1+\ldots+\lambda_4\bar{e}_4) = A(\lambda_1 A\bar{e}_1+\ldots+\lambda_4 A\bar{e}_4) = A(\lambda_3\bar{e}_1+\lambda_4\bar{e}_2) = \lambda_3 A\bar{e}_1+\lambda_4 A\bar{e}_2 = \bar{0}.$$

(b) Om $A \circ A = 0$ så gäller för varje $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ att

$$A(A\bar{x}^T) = \bar{0}.$$

Detta innebär att varje kolonn $A\bar{x}^T$ tillhör A:s nollrum. Men mängden av alla kolonner $A\bar{x}^T$ utgör bildrummet som har dimension 2, som alltså inte kan ligga i nollrummet eftersom detta har dimension 1.