

Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på geometri och vektorer inför lappskrivning nummer 2 på kursen Linjär algebra II, 5B1109, ht 06.

OBS Några av uppgifterna nedan är kanske svårare än den uppgift som kommer på lappskrivningen.

1. Linjens riktningsvektor är $\overline{PQ} = (2, 1, 2) - (1, 1, -1) = (1, 0, 3)$. En punkt (x, y, z) ligger på linjen precis då

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + t(1, 0, 3) = (1 + t, 1, -1 + 3t)$$

för något tal t .

Vi söker nu planets ekvation. En normal till planet är vinkelrät mot vektorerna $(3, 0, 1)$ och $(2, 1, 1)$ eftersom dessa är parallella med planet. Kryssprodukten av dessa vektorer ger en normal

$$\bar{n} = (3, 0, 1) \times (2, 1, 1) = \dots = (-1, -1, 3).$$

Planets ekvation blir då

$$-1(x - 0) + (-1)(y - 0) + 3(z - 0) = 0 \quad \text{dvs} \quad -x - y + 3z = 0.$$

En punkt (x, y, z) tillhör alltså planet precis då dess koordinater satisfierar denna ekvation. Således, en punkt $(x, y, z) = (1 + t, 1, -1 + 3t)$ på linjen ligger i planet om och endast om

$$-(1 + t) - 1 + 3(-1 + 3t) = 0,$$

för något tal t . För $t = 5/8$ är denna ekvation uppfylld. Den sökta skärningspunkten är

$$(x, y, z) = (1 + \frac{5}{8}, 1, -1 + 3\frac{5}{8}) = (\frac{13}{8}, 1, \frac{7}{8}).$$

2. Med $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-1, 3, 0)$ och $R = (1, 1, 1)$ får triangeln sidorna

$$PQ = (-2, 1, -1), \quad PR = (0, 1, 0) \quad \text{och} \quad QR = (2, -2, 1).$$

Vi använder nu kända formler för att beräkna vinklar och längder samt arean.

$$\|PQ\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \quad \|PR\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1,$$

och

$$QR = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Triangelns area är hälften av den area som det parallelogram har, som spänns upp av PR och PQ dvs

$$\text{arean} = \frac{1}{2} \|PQ \times PR\|$$

Vi får enligt formel för beräkning av kryssprodukt att

$$PQ \times PR = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + (-2)\bar{e}_3.$$

Arean blir således

$$\frac{1}{2} \|PQ \times PR\| = \frac{1}{2} \|(1, 0, -2)\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Låt nu θ beteckna vinkeln mellan PQ och PR . Då gäller

$$\cos(\theta) = \frac{PQ \cdot PR}{\|PQ\| \cdot \|PR\|} = \frac{(-2, 1, -1) \cdot (0, 1, 0)}{\|(-2, 1, -1)\| \cdot \|(0, 1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Triangelns övriga vinklar beräknas på samma sätt

3. Benämna punkterna $P = (1, 1, 2)$, $Q = (2, 3, 4)$, $R = (3, -1, -1)$ och $S = (4, 1, 1)$. Ett parallelogram kännetecknas av att sidorna parvis är parallella och som följd därav lika långa.

Vi finner efter prövning att

$$PQ = (1, 2, 2) = RS \quad \text{och} \quad PR = (2, -2, -3) = QS.$$

Alltså parallelogram.

OBS Vi var tvungna att pröva oss fram för att hitta rätt sidor.

4. Vektorerna ligger i samma plan precis då volymen av den parallelepiped som spänns upp av dessa vektorer är lika med 0. Denna volym är beloppet av en determinant vars rader består av de givna vektorerna. Vi får alltså

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2+a \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + (a-2) = a-6.$$

Precis när $a = -6$ ligger vektorerna i samma plan.

5. En vektor parallell med planet är linjens riktningsvektor $(1, 0, -1)$. En annan vektor parallell med planet är vektorn mellan punkten $(2, 1, 0)$ och punkten $(1, 3, 2)$ på linjen, dvs vektorn $(1, -2, -2)$. En normal till detta plan ges av kryssprodukten av dessa vektorer

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2\bar{e}_1 + 1\bar{e}_2 + (-2)\bar{e}_3.$$

Planets ekvation blir då

$$-2(x-2) + (y-1) - 2z = 0 \quad \text{dvs} \quad 2x - y + 2z = 3.$$

Linjen genom punkten $(1, 2, 1)$ parallell med planets normal har parameterforman

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + t(-2, 1, -2).$$

Vi bestämmer nu det t -värdet för vilket linjen skär planet. Som i uppgift 1 får vi

$$2(1-2t) - (2+t) + 2(1-2t) = 3 \quad \text{som ger} \quad t = \frac{-1}{9}.$$

Med det dubbla t -värdet fortsätter vi från den givna punkten passerar planet och hamnar på planets andra sida, lika långt från planet ifråga som startpunkten ligger på. Detta är spegelbilden, som alltså har koordinaterna

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + \frac{-2}{9}(-2, 1, -2) = \left(\frac{13}{9}, \frac{16}{9}, \frac{13}{9}\right).$$

6. Vi skall bestämma talet a så att det finns tal t och tal s med

$$(1, 1, 2) + t(1, 0, -1) = (2, a, 1) + s(2, 1, -1).$$

Dessa värden på t och s ger då en gemensam punkt, dvs en skärningspunkt. Ekvationen ovan ger likheten

$$(-1, 1 - a, 1) = (2s - t, s, -s + t)$$

dvs systemet

$$\begin{cases} 2s - t = -1 \\ s = 1 - a \\ -s + t = 1 \end{cases}$$

Betraktar vi enbart den första och sista av dessa ekvationer får vi att $s = 0$ och $t = 1$. Med $a = 1$ kommer även ekvation nummer två att vara uppfylld.

Sammanfattningsvis: enda möjliga värde på a är 1 och vi får då skärningspunkten $(2, 1, 1)$.

7. Vinkeln mellan planen beskriver vi med hjälp av vinkeln mellan planens normaler, (rita figur!). Dessa normaler är $(1, 1, 3)$ och $(2, -1, 1)$ och för cosinus för vinkeln θ mellan dem gäller

$$\cos(\theta) = \frac{(1, 1, 3) \cdot (2, -1, 1)}{\| (1, 1, 3) \| \cdot \| (2, -1, 1) \|} = \frac{4}{\sqrt{11}\sqrt{6}}.$$

- 8.

$$0 = (1, 1, 1) \cdot (1, 2, a) = 1 + 2 + a,$$

ger $a = -3$. Vidare kräver vi att

$$0 = (1, 1, 1) \cdot (1, b, c) \quad \text{och} \quad 0 = (1, 2, a) \cdot (1, b, c).$$

Då $a = -3$ får vi att

$$0 = 1 + b + c \quad \text{och} \quad 0 = 1 + 2b - 3c.$$

Detta linjära system för b och c ger $b = -4/5$ och $c = -1/5$.

9. Kortaste avståndet är vinkelräta avståndet. Låt O beteckna origo och P en godtycklig punkt på linjen. Avståndet ges av längden av den vektor OP som är vinkelrät mot linjens riktningvektor $(2, 1, -1)$. Då $OP = (1 + 2t, 1 + t, 1 - t)$ får vi rätt t -värde ur ekvationen

$$0 = (2, 1, -1) \cdot (1 + 2t, 1 + t, 1 - t) = 2(1 + 2t) + (1 + t) - (1 - t) = 6t + 2,$$

dvs $t = -1/3$. Avståndet blir alltså lika med

$$\| (1 + 2 \cdot \frac{-1}{3}, 1 + \frac{-1}{3}, 1 - \frac{-1}{3}) \| = \| (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \| = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{21}$$

10. En normal till planet är $\bar{n} = (1, 1, -2)$. Längden av denna vektor är

$$\| \bar{n} \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

Vi får en vektor \bar{e} med längd 1 och med samma riktning som normalen \bar{n} om vi multiplicerar \bar{n} med $1/\|\bar{n}\|$ dvs med $1/\sqrt{6}$:

$$\bar{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Punkten med koordinaterna $(1, 0, 0)$ tillhör givna planet eftersom denna punkts koordinater satisfierar planets ekvation $x + y - 2z = 1$. Punkten med koordinaterna

$$Q = (1, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) = (\frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$$

kommer att ligga på avståndet ett från givna planet. Ett plan med normalvektorn $\bar{n} = (1, 1, -2)$ och genom punkten Q kommer att vara parallellt med givna planet och ligga på avstånd ett från detta. Dess ekvation blir

$$\left(x - \frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{6}}\right) + \left(y - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 2\left(z - \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = 0.$$

11. Den sökta linjens riktning är vinkelrät mot planets normal, eftersom linjen ligger i planet. Så om \bar{v} är en riktningsvektor för linjen så måste \bar{v} vara vinkelrät mot planets normal $(1, 2, -2)$. Dessutom var det givet i uppgiften att \bar{v} är vinkelrät mot vektorn $(1, 1, 1)$. Väljer vi \bar{v} som kryssprodukten mellan $(1, 2, -2)$ och $(1, 1, 1)$ så får vi en riktningsvektor för den sökta linjen. En sedvanlig beräkning av kryssprodukt, jfr t ex uppgift 2, ger

$$(1, 2, -2) \times (1, 1, 1) = (4, -3, -1).$$

Nu har vi både en punkt $(3, 0, 1)$ på den sökta linjen och en riktningsvektor $(4, -3, -1)$ för linjen. Således

Svar: $(x, y, z) = (3, 0, 1) + t(4, -3, -1)$.

12. I precis de uppgifter där mätning av längder och vinklar förekommer skall ON-system påpekas annars kan mätningar inte utföras med våra standardformler. Jag glömde skriva detta i uppgifterna 4, 7, 8, 9 samt nummer 11. Uppgiften 1 går att lösa utan att man förutsätter ett ON-system