

Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar med LÖSNINGAR på linjära ekvationssystem och matriskalkyl inför lappskrivning nummer 1 på kursen linjär algebra II, 5B1109, ht 06.

OBSERVERA Några av uppgifterna nedan är nog svårare än det lappskrivningsproblem som kommer vid lappskrivningen.

1. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

2. Bestäm samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 8 \\ -x + 5y + z = 10 \\ x - 18y + z = -38 \end{cases}$$

3. För vilka värden på talen a och b saknar systemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + u = 8 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ x - 18y + z + au = b \end{cases}$$

lösning.

4. Låt \mathbf{A} och \mathbf{B} beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestäm en invers till matrisen \mathbf{A} och använd denna invers för att bestämma en matris \mathbf{X} sådan att $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

5. Låt matriserna \mathbf{A} och \mathbf{B} vara som ovan. Beräkna

$$(\mathbf{AA})^{-1}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{A})^{-1}, \quad (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})^T, \quad (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^T \quad \text{och} \quad (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1}.$$

6. Bestäm samtliga värden på det reella talet a för vilka det homogena systemet nedan har icke-triviala lösningar.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$$

7. Bestäm talet a så att systemet nedan har minst en lösning

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$$

8. Om \mathbf{A} är symmetrisk och \mathbf{B} inte är symmetrisk är det då sant eller falskt att \mathbf{AB} aldrig kan vara symmetrisk.

Lösningar

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array} \right).$$

Vi läser ut ur tablan ovan att $z = -1$, $y = 2$ och $x = 1$.

2. Andra ekvationen adderad från den tredje ekvationen en gång och två gånger från den första ekvationen ger systemet

$$\begin{cases} + 13y - 2z = 28 \\ -x + 5y + z = 10 \\ - 13y + 2z = -28 \end{cases}$$

Adderar nu vi den sista ekvationen till den första får vi systemet

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x + 5y + z = 10 \\ - 13y + 2z = -28 \end{cases}.$$

Låter vi nu y vara ett godtyckligt tal $y = t$ så får vi för varje val av ett sådant tal t precis en lösning

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(-28 + 13t) = -14 + \frac{13}{2}t \\ x &= -10 + 5y + z = -10 + 5t - 14 + \frac{13}{2}t = -24 + \frac{23}{2}t. \end{aligned}$$

3. Andra ekvationen adderad från den tredje ekvationen en gång och två gånger från den första ekvationen ger systemet

$$\begin{cases} + 13y - 2z + 4u = 28 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ - 13y + 2z + (a+2)u = b+10 \end{cases}$$

Adderar nu vi den sista ekvationen till den första får vi systemet

$$\begin{cases} (a+6)u = b+38 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ - 13y + 2z + (a+2)u = b+10 \end{cases}.$$

Om $a = -6$ och $b \neq -38$ så saknar systemet uppenbarligen lösning.

4. Beräknar först inversen till matrisen A:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Matrisen till höger ovan är inversen men för säkerhets skull gör vi en kontroll

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

precis som det skall vara. Multiplicerar vi nu den givna matrisekvationen med \mathbf{A}^{-1} till vänster på bägge sidor om likhetstecknet får vi

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \text{dvs} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Vi finner alltså

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

5. a)

$$(\mathbf{A}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $(\mathbf{A} + \mathbf{A})^{-1} = (2\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}.$

c)

$$(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1})^T = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d)

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \right)^T = \left(\begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -19 & 45 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 5 & -19 \\ -26 & 45 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -19 & 45 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{5 \cdot 45 + (-26) \cdot (-19)} \begin{pmatrix} 45 & 26 \\ 19 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1-(a-1)^2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

När $a \neq 1$ finns det bara den triviala lösningen. I övriga fall finns det icke-triviala lösningar.

7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & a \\ 1 & -5 & 8 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & a-3 \\ 0 & -7 & 11 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & a-3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-a \end{array} \right)$$

Systemet är lösbart precis då $a = 3$. Då har systemet oändligt många lösningar.

8. Låt \mathbf{A} vara nollmatrisen. Då är \mathbf{AB} symmetrisk för alla matriser \mathbf{B} . Låt \mathbf{A} vara identitetsmatrisen. Då är \mathbf{AB} inte symmetrisk för någon matris \mathbf{B} som inte är symmetrisk.