Lösningar till tentamen den 13 april 2004
Kompletteringskurs i Matematik, 5B1114

1. Eftersom polynomet $p(z) = 2z^3 - z^2 + 2z - 1$ har reella koefficienter, är också $z = -i$ en rot. Polynomet är delbart med $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$. Vi får att $p(z) = (z^2+1)(2z-1)$. Svar: De övriga rötterna är $\underline{z = -i}$ och $\underline{z = \frac{1}{2}}$.

2. a) Matrisen är $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$.

b) Nollrummet av T består av vektorer (x, y, z) sådana att $T(x,y,z) = (0,0)$ dvs. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Koefficientmatrisen är ekvivalent med $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 6+a & 0 \end{pmatrix}$.

1) Om $a = -6$ får vi ekvationen $x - 3y + z = 0$. Då är $(x,y,z) = (3s - t, s, t) = s(3,1,0) + t(-1,0,1)$ där $s, t, \in \mathbf{R}$. En bas för nollrummet är $\{(3,1,0), (-1,0,1)\}$.

2) Om $a \neq -6$, $y = 0$. Nollrummet består av vektorer $t(1,0,-1), t \in \mathbf{R}$. En bas är $\{(1,0,-1)\}$.

3. Vi bestämmer de kritiska punkterna till $f(x,y) = x - x^2 - 2y^2$. $D_1 f(x,y) = 1 - 2x$ och $D_2 f(x,y) = -4y$. Punkten $(\frac{1}{2}, 0)$ ligger på randen av området.

På randen 1) $y = 0, -1 \leq x \leq 1 \quad f(x,y)$ är parabeln $g(x) = x - x^2$. På intervallet $[-1,1]$ gäller $-2 = g(-1) \leq g(x) \leq g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

2) $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$. Där är $f(x,y) = x - x^2 - 2(1 - x^2) = x^2 + x - 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ som är $\geq -\frac{9}{4}$. I ändpunkterna -1 resp. 1 antar funktionen värden -2 resp. 0.

Det minsta resp. största värdet av f är $\underline{f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{9}{4}}$ resp. $\underline{f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{4}}$.

4. Vi bestämmer först kurvornas skärningspunkter. Från ekvationen $x^4 = 4 - 3x^2$, dvs. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ följer att $x^2 = \frac{-3 \pm 5}{2}$. Vi får punkterna $(\pm 1, 1)$. Arean $= \int_{-1}^{1} (\int_{x^4}^{4-3x^2} dy)\, dx = \int_{-1}^{1} (4 - 3x^2 - x^4)\, dx = 2 \int_0^1 (4 - 3x^2 - x^4)\, dx = \underline{\frac{28}{5}}$.

5. Enligt Green's sats

$$\oint_C (x+y^3)\,dx - (y+x^3)\,dy = \iint_A (-3x^2-3y^2)\,dx\,dy$$

där A är cirkelsektorn $\{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1,\ 0 < y < \sqrt{3}\,x\}$. I polära kordinater är integralen $= -3\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\int_0^1 r^3\,dr)\,d\theta = -3\int_0^1[\frac{r^4}{4}]_0^1\,d\theta = \underline{-\frac{\pi}{4}}$.

6. De partiella derivatorna av $h(x,y,z) = f(x/y,\ x/z)$ är enligt kedjeregeln $D_1h = \frac{1}{y}D_1f + \frac{1}{z}D_2f$, $D_2h = -\frac{x}{y^2}D_1f$ och $D_3h = -\frac{x}{z^2}D_2f$. Således är $xD_1h + yD_2h + zD_3h = x(\frac{1}{y}D_1f + \frac{1}{z}D_2f) + y(-\frac{x}{y^2}D_1f) + z(-\frac{x}{z^2}D_2f) = 0$.

7. Från ekvationerna $D_1f(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 2x = 0$ och $D_2f(x,y) = -6xy = 0$ följer a) om $x = 0$ så är $y = 0$ b) om $y = 0$ så är $x(3x+2) = 0$. Vi får två kritiska punkter: $(0,0)$ och $(-\frac{2}{3},0)$.

Vidare är $A = D_{11}f(x,y) = 6x+2$, $B = D_{12}f(x,y) = -6y$, $C = D_{22}f(x,y) = -6x$. I punkten $(-\frac{2}{3},0)$ är $AC - B^2 = -8 < 0$. Punkten är en sadelpunkt. I punkten $(0,0)$ är $AC - B^2 = 0$. Vi undersöker funktionen $f(x,y) = x(x^2 - 3y^2 + x)$. I origo ä $f = 0$. Nära origo, på linjen $y = x$ är $f(x,x) = x^2(1-2x) > 0$ om $x \neq 0$. På kurvan $y = \sqrt{x}$ är $f(x,\sqrt{x}) = x^2(x-2) < 0$ för $0 < x < 2$. Origo är också en sadelpunkt. Funktionen har inga lokala extrempunkter.

8. Enligt Gauss' sats är $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K div\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz$ där K är kroppen $\{(x,y,z) : 0 \le z \le \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)\}$. Divergensen av $\mathbf{F}$ är $= 2$.
Vi får nu $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 2$ Volymen av K
$= 2\iint_{x^2+y^2\le 1}(\int_0^{\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)}\,dz)\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 1}(1-x^2-y^2)\,dx\,dy$. I polära kordinater är integralen $= \int_0^1(\int_0^{2\pi} r(1-r^2)\,d\theta)\,dr = 2\pi[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{2}}$.

9. I sfäriska koordinater är

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le b^2}(1+x^2+y^2+z^2)^{-1}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}(\int_0^b(\int_0^{\pi}\frac{\rho^2\sin\phi}{1+\rho^2}\,d\phi)\,d\rho)\,d\theta = \int_0^{2\pi}(\int_0^b(\frac{\rho^2}{1+\rho^2}[-\cos\phi]_0^{\pi})\,d\rho)\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}(\int_0^b(1-\frac{1}{1+\rho^2})\,d\rho)\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}[\rho - \arctan\rho]_0^b\,d\theta$$

$$= \underline{4\pi(b - \arctan b)}.$$

10. Vektorfältet $F(x,y) = (\sin x \cos y, \cos x \sin y)$ är konservativt: $\frac{\partial}{\partial x}(\cos x \sin y) = -\sin x \sin y = \frac{\partial}{\partial y}(\sin x \cos y)$. Därför är $\oint_C F \cdot dr = 0$. Vidare är $\oint_C \sin x \cos y\, dx - (\cos x \sin y + x)\, dy = \oint_C x\, dy$. Genom att använda parameterframställningen $x = \cos\theta, y = \sin\theta$ får vi $= \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \underline{\pi}$.

11. De partiella derivatorna av $f(x,y) = \frac{x^2}{2(1-y)}$ är $D_1 f(x,y) = \frac{x}{1-y}$ och $D_2 f(x,y) = \frac{x^2}{2(1-y)^2}$. Vi får att $dS = \sqrt{1 + (D_1 f(x,y))^2 + (D_2 f(x,y))^2} dxdy$

$$= \sqrt{1 + (\frac{x}{1-y})^2 + \frac{1}{4}(\frac{x}{1-y})^4}\, dxdy$$
$$= \sqrt{(1 + \frac{1}{2}(\frac{x}{1-y})^2)^2}\, dxdy = (1 + \frac{1}{2}(\frac{x}{1-y})^2)\, dxdy.$$

Arean är $\iint_S dS = \iint_R (1 + \frac{1}{2}(\frac{x}{1-y})^2)\, dx\, dy$ där R är rektangeln $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \frac{1}{2}$. Eftersom $\iint_R 1\, dx\, dy =$ arean av $R = \frac{1}{2}$ får vi att arean $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 (\int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{1-y})^2)\, dy)\, dx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 [\frac{1}{1-y}]_0^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}[x^3]_0^1 = \underline{\frac{2}{3}}$.

12. a) Vi antar att $B = S^{-1}AS$. Om $Au = \lambda u, u \neq 0$, dvs λ är ett egenvärde till A och u är en motsvarande egenvektor, så följer att $S^{-1}Au = \lambda S^{-1}u$, dvs. $B(S^{-1}u) = \lambda S^{-1}u$ och $S^{-1}u \neq \bar{0}$. Detta visar att A:s egenvärden är också egenvärden till B. P.g.a. symmetrin är B:s egenvärden egenvärden till A.

b) Från beviset i a) följer att om $u_1, u_2, ..., u_k$ är linjärt oberoende egenvektorer till A som motsvarar ett egenvärde λ, så är vektorerna $S^{-1}u_1, S^{-1}u_2, ..., S^{-1}u_k$ egenvektorer till B motsvarande egenvärdet λ. Vi visar att dessa är linjärt oberoende. Antag att $c_1 S^{-1}u_1 + c_2 S^{-1}u_2 + ... + c_k S^{-1}u_k = \bar{0}$ för några koefficienter $c_1, c_2, .., c_k$. Då är också vektorn $S(c_1 S^{-1}u_1 + c_2 S^{-1}u_2 + ... + c_k S^{-1}u_k) = c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_k u_k = \bar{0}$. Eftersom vektorerna $u_1, u_2, ..., u_k$ är linjärt oberoende, är $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$. Dimensionen av A:s egenrum är därför $\le$ dimensionen av B:s egenrum. P.g.a. symmetrin har egenrummen samma dimension.