Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Kompletteringskurs i matematik 5B1114

Tisdagen den 22 april 2003, kl 8.00-13.00

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 28, 42 och 54 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

. . . .

1. Lös ekvationen $z^2 + (3i - 2)z - 1 - 3i = 0$. (4p)

2. Låt $f(x, y, z) = \tan(x - y + 3z)$. I vilken riktning är riktningsderivatan av f störst i punkten $(3, 0, -1)$? Ange också det största värdet av riktningsderivatan. (4p)

3. Sök de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ och bestäm deras karaktär. (4p)

4. Beräkna $\oint_C \sqrt{1 + x^3}\, dx + 2xy\, dy$ där C är randen till triangeln med hörn $(0, 0), (1, 0)$ och $(1, 3)$ och C genomlöps en gång moturs. (4p)

5. Antag att funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ har kontinuerliga partiella derivator. Låt $g(x, y) = f(u, v)$ där $u = x^2 - y^2$ och $v = xy$. Visa att

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = 2u\frac{\partial f}{\partial u} + 2v\frac{\partial f}{\partial v}.$$

(4p)

6. Bestäm en bas för vektorrummet $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + 2y - 5z = 0\}$. (4p)

v.g. vänd

7. Avgör om följande vektorfält är konservativa och bestäm potentialfunktion i förekommande fall.

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$

b) $\mathbf{G}(x, y, z) = (y, z, x)$

c) $\mathbf{H}(x, y, z) = (z, x, y)$. (4p)

8. Beräkna $\iint_S y\,dS$ där S är ytan $z = x + \sqrt{3}\,y^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$. (6p)

9. Beräkna $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy$ över området A som bestäms av olikheterna $x > 0, |y| \le x$ och $1 \le x^2 + y^2 \le 3$. (6p)

10. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS,$$

där $\mathbf{F}(x, y, z) = (zy^4, x^3, z^2)$, S är begränsningsytan till kroppen $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$, och $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen på S. (6p)

11. En linjär avbildning $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definieras genom

$$T(x, y, z) = (5x - 2z,\ 5y, -2x + 2z).$$

a) Bestäm T:s matris ($= A$) i standardbasen. (2p)

b) Visa att A :s egenvärden är $1, 5$ och 6 och bestäm dess egenvektorer. (2p)

c) Bestäm en diagonalmatris D och en ortogonalmatris P så att $P^t AP = D$. (2p)

12. Beräkna den generaliserade integralen

$$\iiint_{\mathbf{R^3}} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz.$$

(6p)

13. Bestäm de punkter på ytan $xy^2z^3 = 2$ som är närmast origo. (8p)

Lösningar till tentamen den 22 april 2003
Kompletteringskurs i Matematik, 5B1114

1. Genom kvadratkomplettering får vi $(z+\frac{3i-2}{2})^2-\frac{(3i-2)^2}{4}-1-3i=0$. Det följer att $(z+\frac{3i-2}{2})^2=-1/4$. Vidare är $z+\frac{3i-2}{2}=\pm\frac{i}{2}$. Svar: $\underline{z=1-2i}$ och $\underline{z=1-i}$.

2. Derivering ger grad $f(x,y,z)=(\cos^{-2}(x-y+3z),-\cos^{-2}(x-y+3z),3\cos^{-2}(x-y+3z)$ och grad $f(3,0,-1)=(1,-1,3)$. Riktningsderivatan $D_uf(3,0,-1)=(1,-1,3)\cdot u$ är störst i gradientens riktning. För $u=\frac{(1,-1,3)}{\sqrt{11}}$ är $D_uf(3,0,-1)=\sqrt{11}$. Svar: Riktningsderivatan är störst i riktningen $\underline{(1,-1,3)}$ och dess största värde är $\underline{\sqrt{11}}$.

3. I en kritisk punkt är $D_1f(x,y)=0$ och $D_2f(x,y)=0$, dvs. $3x^2+3y=0$ och $3y^2+3x=0$. Det följer att $3x^4+3x=0$. De kritiska punkterna är $(0,0)$ och $(-1,-1)$. I en punkt (x,y) är $AC-B^2=D_{11}fD_{22}f-(D_{12}f)^2=36xy-9$.
1) I origo är $AC-B^2=-9$. Origo är således en sadelpunkt.
2) I punkten $(-1,-1)$ är $AC-B^2=27>0$ och $A=-6<0$. Funktionen har lokalt maximum i punkten $(-1,-1)$.

4. Enligt Green's formel är integralen $=\iint_A(D_1F_2-D_2F_1)dxdy=\iint_A 2ydxdy$ där A är området innanför den slutna integrationsvägen. Vi får $\oint_C\sqrt{1+x^3}\,dx+2xy\,dy=\int_0^1(\int_0^{3x}2ydy)dx=\int_0^1 9x^2dx=3$.

5. Låt $G(x,y)=(x^2-y^2,xy)$. Jacobimatrisen av G är $\begin{pmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{pmatrix}$. Enligt kedjeregeln är $D_1g=2xD_1f+yD_2f$ och $D_2g=-2yD_1f+xD_2f$. Det följer att

$$xD_1g+yD_2g=2x^2D_1f+xyD_2f-2y^2D_1f+xyD_2f=2uD_1f+2vD_2f.$$

6. Låt $z=t$ och $y=s$. Då är $x=-2s+5t$. Vi får $(x,y,z)=(-2s+5t,s,t)=s(-2,1,0)+t(5,0,1)$. Varje vektor i vektorrummet kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $(-2,1,0)$ och $(5,0,1)$ som är linjärt oberoende och uppfyller ekvationen. Svar: En bas är $\{(-2,1,0),(5,0,1)\}$.

7. a) Från ekvationerna $D_1\mathbf{F}_2=D_2\mathbf{F}_1=0$, $D_1\mathbf{F}_3=D_3\mathbf{F}_1=1$, och $D_2\mathbf{F}_3=D_3\mathbf{F}_2=0$, följer att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt. Funktionen $u(x,y,z)=xz+\frac{y^2}{2}$ är en potential till $\mathbf{F}$.

b) och c) Eftersom $D_1\mathbf{G}_2 = 0, D_2\mathbf{G}_1 = 1$ och $D_1\mathbf{H}_2 = 1, D_2\mathbf{H}_1 = 0$ så är varken $\mathbf{G}$ eller $\mathbf{H}$ konservativt.

8. Låt $f(x,y) = x + \sqrt{3}\,y^2$. Eftersom $D_1 f(x,y) = 1$ och $D_2 f(x,y) = 2\sqrt{3}\,y$ är

$$\iint_S y\,dS = \int_0^1 dx \int_0^2 y\sqrt{1+1+12y^2}dy = \int_0^2 y\sqrt{2+12y^2}dy$$

$$= \frac{1}{36}[(2+12y^2)^{\frac{3}{2}}]_0^2 = \frac{1}{36}(50^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) = \underline{\frac{62\sqrt{2}}{9}}.$$

9. I polära koordinater är integrationsområdet en rektangel D: $1 \le r \le \sqrt{3}, -\pi/4 \le \theta \le \pi/4$. Vi får $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_D \frac{r\cos\theta}{r^2} r\,drd\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta \int_1^{\sqrt{3}} dr = \underline{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1).}$

10. Sfären och konen skär varandra längs cirkeln $x^2 + y^2 = 1/2, z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Enligt divergenssatsen

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K 2z\,dxdydz = \iint_D (\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 2z\,dz)dxdy$$

där K är kroppen innanför den slutna ytan S och D är cirkelskivan $x^2+y^2 \le 1/2$. Vidare är

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_D (1-2x^2-2y^2)\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} (\int_0^{1/\sqrt{2}} (1-2r^2)rdr)d\theta = 2\pi[\frac{r^2-r^4}{2}]_0^{1/\sqrt{2}} = \underline{\frac{\pi}{4}}.$$

11. Matrisen till T är $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ och $\det(A - \lambda I) = (5-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) - 4(5-\lambda) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6)$. Egenvärden är $1, 5$ och 6. Egenvektorerna är lösningar till ekvationen $(A-\lambda I)X = 0$. För $\lambda = 1$ är koefficientmatrisen $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lösningarna är $X = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.

För $\lambda = 5$ resp. 6 fås egenvektorerna $X = t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ resp. $X = t\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ $t \in \mathbf{R}$ $t \neq \bar{0}$. Egenvektorerna är ortogonala eftersom A är en symmetrisk matris. Matrisen $\underline{P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}}$ är ortogonal och $\underline{P^tAP = D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}}$.

12. Vi använder sfäriska koordinater $x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$.

$$\iiint\limits_{\mathbf{R^3}} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz. = \int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi}(\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^2\sin\phi d\rho)\,d\phi)\,d\theta)$$

Genom partiell integration får vi

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^2\,d\rho = [-\rho^2e^{-\rho}]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty}\rho e^{-\rho}\,d\rho = -2[\rho e^{-\rho}]_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-\rho}\,dr = 2.$$

där vi har använt att $\lim_{\rho\to\infty}\frac{\rho^2}{e^{\rho}} = \lim_{\rho\to\infty}\frac{\rho}{e^{\rho}} = 0$. Vidare är

$$\iiint\limits_{\mathbf{R^3}} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz. = 2\int_0^{2\pi}(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi)d\,\theta = \underline{8\pi}.$$

13. Avståndet från origo till en punkt (x, y, z) på ytan är $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ där $xy^2z^3 = 2$. Eftersom $y^2 = \frac{1}{xz^3}$, så är $xz > 0$. Låt $f(x, z) = x^2 + \frac{2}{xz^3} + z^2$. Vi bestämmer de kritiska punkterna till f:

$$\begin{cases} D_1f(x,z) & = 2x - \frac{2}{x^2z^3} = 0\\ D_2f(x,z) & = 2z - \frac{6}{xz^4} = 0\end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x^3z^3 = 1\\ xz^5 = 1\end{cases}$$

Den första ekvationen är ekvivalent med $xz = 1$. Insättning i den andra ekvationen ger $x^4 = 1$. Vi får att $x = \pm 3^{-1/4}$. De kritiska punkterna är $\pm(3^{-1/4}, 3^{1/4})$ och $f(\pm(3^{-1/4}, 3^{1/4})) = 2\sqrt{3}$. P.g. av symmetrin kan vi anta att $x > 0$ och $z > 0$. Om $x \to 0+$ (resp. $z \to 0+$) och z (resp. x) är begränsad, så $f(x, z) \to \infty$. Också om x eller $z \to \infty$, så $f(x, z) \to \infty$. Minsta värdet för f är således $2\sqrt{3}$.

Svar: Punkterna $\pm(3^{-1/4}, \sqrt{2}\,3^{-1/4}, 3^{1/4}))$ och $\pm(3^{-1/4}, -\sqrt{2}\,3^{-1/4}, 3^{1/4}))$ är närmast origo.