Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

Tentamensskrivning, Kompletteringskurs i matematik 5B1114

Tisdagen den 13 april 2004, kl 8.00-13.00.

Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 28, 42 och 54 poäng.
Inga hjälpmedel är tillåtna.
. . . .

1. En rot till ekvationen $2z^3 - z^2 + 2z - 1 = 0$ är $z = i$. Bestäm de övriga rötterna. (4p)

2. En linjär avbildningen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definieras genom $T(x, y, z) = (x - 3y + z, 2x + ay + 2z)$ där a är en reell konstant.
a) Bestäm matrisen till T med avseende på standardbaser.
b) Bestäm en bas för nollrummet av T för olika värden av a. (6p)

3. Bestäm största och minsta värdet som funktionen $f(x, y) = x - x^2 - 2y^2$ antar i området $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$. (4p)

4. Bestäm arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^4$ och $y = 4 - 3x^2$. (4p)

5. Använd Green's sats för att beräkna linjeintegralen $\oint_C (x+y^3)\,dx - (y + x^3)\,dy$ där C är den slutna kurva som omsluter cirkelsektorn $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1,\ 0 < y < \sqrt{3}\,x\}$ genomlöpt moturs. (5p)

6. Antag att funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ är differentierbar. Visa att funktionen $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, som definieras genom $h(x, y, z) = f(x/y,\ x/z)$ om $y \neq 0$ och $z \neq 0$, uppfyller ekvationen $xD_1h + yD_2h + zD_3h = 0$. (5p)

7. Undersök om funktionen $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2$ har lokala extrempunkter. (6p)

v.g. vänd

8. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$ där $\mathbf{F}(x,y,z) = (z, 0, x^2 + 2z)$ och S är den slutna yta som begränsas av xy-planet och paraboloiden $2z = 1 - x^2 - y^2$. Enhetsnormalen $\mathbf{N}$ är riktad utåt. (6p)

9. Beräkna $\iiint_K (1 + x^2 + y^2 + z^2)^{-1}\, dx\, dy\, dz$ över klotet $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$ (b är en positiv konstant). (6p)

10. Beräkna $\oint_C \sin x \cos y\, dx + (\cos x \sin y + x)\, dy$ där C är enhetscirkeln $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ genomlöpt ett varv moturs. (6p)

11. Bestäm arean av ytan

$$z = \frac{x^2}{2(1-y)}, \quad 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2}.$$

(6p)

12. Vi betraktar kvadratiska matriser ($n\,x\,n$-matriser, $n \geq 2$). Matrisen B är <u>similär</u> med matrisen A, om det finns en inverterbar matris S så att $B = S^{-1}AS$. (Då är också A similär med B för att $A = T^{-1}BT$ med $T = S^{-1}$).

a) Visa att om B är similär med A, så har A och B samma egenvärden.

b) Antag att λ är ett egenvärde för A och B. Visa att de motsvarande egenrummen har samma dimension. (8p)