Institutionen för matematik.
KTH

Lösningar till tentamen i Matematik I, 5B1115, 5B1135 för Bio. E,I,K,ME, Media och OPEN, lördagen den 10/1 2004.

1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+x)-\ln 2x}{\ln(2+x)-\ln 3x} = \begin{bmatrix} '\frac{0}{0}' \\ \text{l'H} \end{bmatrix} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{x}} = \;= \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{3}-1} = \underline{\frac{3}{4}}.$$

2.

$$\int_0^1 \frac{3x\ dx}{\sqrt{x+1}} = \begin{bmatrix} x+1=t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{3(t^2-1)2tdt}{t} =$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} (6t^2-6)dt = \Big[2t^3-6t\Big]_1^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}-6\sqrt{2}-(2-6) = \underline{4-2\sqrt{2}}.$$

3.

$y'' + 8y' + 16y = 2x + 1.$

y_H : $r^2 + 8r + 16 = (r+4)^2 = 0,\quad r = -4$ dubbelrot.
$y_H = (Ax+B)e^{-4x}.$

y_P : Ansätt $y_P = ax + b,\quad y_P' = a,\quad y_P'' = 0.$
$0 + 8a + 16(ax+b) = 2x + 1$ ger $16a = 2,\quad a = 1/8.$
och $8a + 16b = 1,\quad 1 + 16b = 1,\quad b = 0.$
Alltså $y_P = \dfrac{x}{8}.$

$$\underline{y = (Ax+B)e^{-4x} + \frac{x}{8}}.$$

V.g. vänd!

4.

$$V = \pi \int_0^\pi (1 + \sin x + \cos x)^2 \; dx =$$

$$\pi \int_0^\pi (1{+}\sin^2 x{+}\cos^2 x{+}2\sin x{+}2\cos x{+}2\sin x \cos x) \; dx =$$

$$\pi \int_0^\pi (1{+}1{+}2\sin x{+}2\cos x{+}\sin 2x) \; dx =$$

$$\pi \left[2x{-}2\cos x{+}2\sin x{-}\frac{1}{2}\cos 2x \right]_0^\pi =$$

$$\pi(2\pi{+}2{-}\frac{1}{2}{-}({-}2{-}\frac{1}{2})) = \underline{2\pi^2 + 4\pi}.$$

5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3) + x^4 \ln|x|}{\sin x - x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + O(x^6) + x^4 \ln|x|}{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + O(x^3) + x \ln|x|}{-\frac{1}{6} + O(x^2)} = \frac{1+0+0}{-\frac{1}{6}+0} = \underline{-6},$$

eftersom $\lim_{x\to 0} x \ln|x| = 0$.

6.

Kurvan definieras av $x^2y^3 - x^3y^2 = 12$.
Punkten $(-1, 2)$ ligger på kurvan.
Implicit derivering av kurvans ekvation ger:
$2xy^3{+}x^2{\cdot}3y^2y'{-}3x^2y^2{-}x^3{\cdot}2yy' = 0$
I punkten $(-1, 2)$: $\quad -16 + 12y'(-1) - 12 - (-4)y'(-1) = 0,$
$16y'(-1) = 28, \quad y'(-1) = 7/4.$
Tangentens ekvation i $(-1, 2)$ är alltså $\quad \underline{y - 2 = \frac{7}{4}(x + 1)}.$

7. $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 1)\ln(1 + x^2) - 4\arctan x - \frac{x^2}{2} + 4x.$

Lokala extremvärden skall bestämmas.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x-2)\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}(x^2-4x+1)\frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{1+x^2} - x + 4 = \\
&= (x-2)\ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2}(x^3 - 4x^2 + x - 4 + (-x+4)(1+x^2)) = \\
&= (x-2)\ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2}(x^3 - 4x^2 + x - 4 - x - x^3 + 4 + 4x^2) = \\
&= (x-2)\ln(1+x^2) + \frac{1}{1+x^2}\cdot 0 = \underline{(x-2)\ln(1+x^2)}
\end{aligned}
$$

$f'(x) = 0$ för $x = 2$ och $x = 0$. $\quad (\ln(1+x^2) = 0, \quad 1 + x^2 = 1, \quad x = 0).$

Man får följande teckentabell:

x		0		2	
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
$f'(x)$	-	0	-	0	+

$\underline{x = 2}$ ger alltså <u>lokalt minimum.</u>
$f_{min} = f(2) = -\frac{3}{2}\ln 5 - 4\arctan 2 + 6.$
($x = 0$ ger inflexionspunkt.)

8. Följande påstående $P(n)$ skall visas gälla för $n = 1, 2, 3, ...$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$P(1):\qquad \frac{2}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$, stämmer.

Antag att $P(m)$ är sant och försök visa att då också $P(m+1)$ är sant.

$$VL_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} + \frac{2}{(m+1)(m+2)(m+3)} =$$

$$= \left[\text{Antag } P(m)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{2}{(m+1)(m+2)(m+3)} =$$

V.g. vänd!

$$\frac{1}{2} - \frac{m+3-2}{(m+1)(m+2)(m+3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(m+2)(m+3)} = HL_{m+1}$$

Alltså, $P(M) \Rightarrow P(m+1)$.
Alltså gäller $P(n)$ för $n = 1, 2, 3, ...$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2} - 0 = \underline{\frac{1}{2}}.$$

9.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

skall uppfylla fyra givna villkor.
Vi visar att för exempelvis $f(x)$, definierad nedan , uppfylls alla villkor:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Med detta val av $f(x)$ får man:

$$F(x) = \int_0^x (-2)dt = -2x, \qquad \text{för } 0 \leq x \leq 1.$$

$$F(x) = -2 + \int_1^x 2dt = -2 + 2(x-1) = 2x - 4, \quad 1 < x \leq 2.$$

Detta visar att $F(2) = 0$.
samt $F(x) \leq 0$, då $0 \leq x \leq 2$,
$F_{min} = F(1) = -2$
och slutligen att $F(x)$ inte är deriverbar i $x = 1$, eftersom $F'_{-}(1) = -2 \neq F'_{+}(1) = 2$.

10.

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx + \int_a^\infty \frac{\sin x}{x} dx = I_1 + I_2. \quad (a > 0).$$

I_1 är inte generaliserad eftersom integranden är begränsad nära $x = 0$ $(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1)$.

$$I_2 = \lim_{N\to\infty} \int_a^N \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{N\to\infty} \left(\left[\frac{-\cos x}{x} \right]_a^N - \int_a^N \frac{\cos x}{x^2} dx \right),$$

vilket konvergerar eftersom båda termerna i gränsvärdet konvergerar:

$\lim_{N\to\infty} \frac{-\cos N}{N}$ konvergerar eftersom $\cos N$ är begränsad.

$\int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ konvergerar eftersom integralen är absolutkonvergent.

$(\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, som ger en konvergent integral $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$.)