

Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004-10-22, kl. 8.00-13.00.
5B1115 Matematik I för Bio1, K1 och Media1, 6p.

Skriv namn och födelsenummer på varje blad. Endast en uppgift per blad.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs preliminärt minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering. Inga hjälpmedel.

1. Bevisa att

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

för alla naturliga tal $n \geq 4$.

(3p)

2. Beräkna

$$\int_0^1 x^2 e^x dx.$$

(3p)

3. Uttryck

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

med hjälp av $\sin x$ och $\cos x$.

(3p)

4. Hur många riskorn behövs för att på ett schackbrädes 64 rutor lägga 1 riskorn på brädets första ruta, 2 på dess andra, 4 på dess tredje och så vidare, genom att varje gång dubbla antalet från föregående ruta, till och med dess 64:e och sista ruta.

(3p)

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}}{x^2}.$$

(3p)

6. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen

$$f(x) = x^2 - |3x - 2|.$$

(4p)

V.g. vänd!

7. Bestäm den allmänna lösningen till

$$y'' - 3y' + 2y = e^x + 2x^2.$$

(4p)

8. Beräkna

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dr}{r^2 \sqrt{3 + \frac{2}{r} - \frac{1}{r^2}}}.$$

(Tips: substituera $1/r = u$, kvadratkomplettera och gör ytterligare en eller två substitutioner.)

(4p)

9. Vad är derivatan av funktionen

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{då } x \neq 1, \\ 3 & \text{då } x = 1 \end{cases}$$

i punkten $x = 1$ och då $x \neq 1$. Använd derivatans definition!

(4p)

10. Beräkna kvoten mellan höjden och radien av en cylinder som, då cylinderns area är given, maximerar dess volym.

(4p)