Institutionen för matematik.
KTH

Lösningar till tentamen i Matematik 1, 5B1115, för Bio, E, K och Media samt 5B1135 för ME . måndagen den 10/1 2005 kl. 14.00 - 19.00.

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{\cos 3x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^2/2 + O(x^3) - x}{1-(3x)^2/2! + O(x^4) - 1} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^2/2 + O(x^3)}{-9x^2/2 + O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1/2 + O(x)}{-9/2 + O(x^2)} = \frac{-1/2+0}{-9/2+0} = \underline{\frac{1}{9}}.$$

2. Skissera kurvan $y = f(x) = \arctan x + \dfrac{1}{1+x}$, $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2-(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}.$$

Alltså $f'(x) < 0$ för $-1 < x \leq 0$, dvs $f(x)$ är avtagande där,
och $f'(x) \geq 0$ för $x \geq 0$, dvs $f(x)$ är växande där.
Dessutom $f(0) = 0 + 1 = 1 > 0$.
Detta visar att $f(x) \geq 1$ för alla $x > -1$.

Svar: $f(x)$ har <u>inga 0-ställen</u> i intervallet $x > -1$.

3. $$\int_0^1 \frac{4x+2}{x^2+2x+2}dx = \int_0^1 \frac{2(2x+2)}{x^2+2x+2}dx - \int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2+1}dx =$$

$$\Big[2\ln(x^2+2x+2)\Big]_0^1 - \Big[2\arctan(x+1)\Big]_0^1 =$$

$$2\ln 5 - 2\ln 2 - 2(\arctan 2 - \tfrac{\pi}{4}) = \underline{2\ln\tfrac{5}{2} - 2\arctan 2 + \tfrac{\pi}{2}}.$$

V.g. vänd!

4. Visa att $e^x(1-x) \le 1$ för alla x.

Sätt $g(x) = e^x(1-x)$.

$g'(x) = e^x(1-x) + e^x \cdot (-1) = -xe^x$.

Detta ger teckentabellen:

		0	
$g(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$
$g'(x)$	+	0	-

Tabellen visar att $g(x) \le 1$ för alla x. VSV.

5. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då ytan, definierad av $0 \le y \le h(x) = x\sqrt{\ln(x+1)}, \quad 0 \le x \le 1,$ roterar omkring x-axeln.

$$V = \pi \int_0^1 x^2 \ln(x+1)\ dx =$$

$$\pi \left[\frac{x^3}{3} \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{\pi}{3} \int \frac{x^3}{x+1}\ dx$$

$$\frac{\pi}{3}\ln 2 - \frac{\pi}{3} \int \frac{x^3+1-1}{x+1}\ dx = \frac{\pi}{3}\ln 2 - \frac{\pi}{3} \int (x^2 - x + 1)dx + \int_0^1 \frac{dx}{x+1} =$$

$$\frac{\pi}{3}\ln 2 - \frac{\pi}{3} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) \right]_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{3}\ln 2 - \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 - 0\right) = \underline{\frac{2\pi}{3}\ln 2 - \frac{5\pi}{18}}.$$

6. Bestäm värdemängden (dvs de värden funktionen antar) för funktionen

$$F(x) = \frac{4+x}{2+|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{4+x}{2-x}, & x < 0 \\ \frac{4+x}{2+x}, & x \geq 0 \end{cases} \qquad F'(x) = \begin{cases} \frac{(2-x)-(4+x)(-1)}{(2-x)^2} & = \frac{6}{(2-x)^2}, \quad x < 0 \\ \frac{(2+x)-(4+x)}{(2+x)^2} & = -\frac{2}{(2+x)^2}, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Dessutom: $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4/x+1}{2/x-1} = -1.$

$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4/x+1}{2/x+1} = 1,$

Observera att $F(x)$ är kontinuerlig överallt eftersom de ingående funktionerna är kontinuerliga och nämnaren är $\neq 0$.

Man får teckentabellen:

	$-\infty$		0		∞
$F(x)$	$\to -1$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\to 1$
$F'(x)$		+		-	

Tabellen visar att värdemängden $\underline{V_F =]-1, 2]}$ dvs $-1 < F(x) \leq 2$.

7.a Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen
$y'' - 2y' - 3y = e^{-2x}$.

y_H : Karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r - 3 = 0$ ger $r = 1 \pm \sqrt{4}$.
$r_1 = -1, \quad r_2 = 3.$

Man får $y_H = Ae^{-x} + Be^{3x}$.

y_P : Ansätt $y_P = ae^{-2x}$ (ej resonans). Insättning ger:
$a(-2)^2e^{-2x} - 2a(-2)e^{-2x} - 3ae^{-2x} = e^{-2x}, \qquad 5ae^{-2x} = e^{-2x}$ dvs $a = 1/5$

Alltså, $\quad y_P = \dfrac{e^{-2x}}{5}.$

Svar:Allmänna lösningen $y(x) = \underline{Ae^{-x} + Be^{3x} + \dfrac{e^{-2x}}{5}}.$

V.g. vänd!

7.b Antag att en lösning i 7a uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = b$ och $y'(0) = 0$.
Bestäm b så att lösningen blir begränsad.

För att lösningen skall vara begränsad fordras att $B = 0$ i allmänna lösningen.
Lösningen måste alltså vara av typ $y(x) = Ae^{-x} + \frac{e^{-2x}}{5}$. Derivering ger $y'(x) = -Ae^{-x} - \frac{2}{5}e^{-2x}$
Villkoren $y(0) = b$ och $y'(0) = 0$ ger då:
$y(0) = A + 1/5 = b$ och $y'(0) = -A - 2/5 = 0$.
Detta ger $A = -2/5$ och alltså $b = -2/5 + 1/5 = \underline{-1/5}$.

8.a

$$\int_5^\infty \frac{dx}{x^2-4x} = \int_5^\infty \frac{dx}{x(x-4)} = \int_5^\infty \left(\frac{1/4}{x-4} - \frac{1/4}{x}\right)dx =$$
$$= \left[\frac{1}{4}\ln|x-4| - \frac{1}{4}\ln|x|\right]_5^\infty = \left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right|\right]_5^\infty =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4}\ln\left|1-4/x\right|\right) - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5} = 0 + \frac{1}{4}\ln 5 = \underline{\frac{\ln 5}{4}}.$$

8.b Avgör om den generaliserade integralen $I = \int_5^\infty \frac{dx}{x^2 + 4\sin x}$ är konvergent eller divergent.

I har en positiv integrand. Jämför med den konvergenta integralen $J = \int_5^\infty \frac{dx}{x^2}$:

(Kvotregeln) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+4\sin x}\right)\Big/\left(\frac{1}{x^2}\right) =$
$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+(4\sin x)/x^2} = 1 \neq 0$.
Alltså är den generaliserade integralen I $\underline{\text{konvergent}}$.

Alternativ (med användning av 8a.):
Eftersom $4\sin x > -4x$ för $x > 0$ gäller: $0 < \frac{1}{x^2+4\sin x} < \frac{1}{x^2-4x}$.
Alltså är I konvergent eftersom integralen i **8.a** är konvergent.

9.a Visa att $10^n + 8$ är jämnt delbart med 9 för $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Induktionsbevis:
$P(n) : 10^n + 8 = 9k$ för något helt tal k ska visas för $n = 0, 1, 2, \ldots.$
I. $P(0) : 10^0 + 8 = 9 = 9k$ för $k = 1$. $P(0)$ sant.

II. Antag $P(m) : 10^m + 8 = 9k$ gäller.
$P(m + 1) : 10^{m+1} + 8 = 9k_1$ ska visas.
VL i $P(m + 1) = 10^{m+1} + 8 = 10^m \cdot 10 + 8 =$ (induktionsantagandet)
$= 10(9k - 8) + 8 = 90k - 72 = 9(10k - 8) = 9k_1$ VSV.
Alltså gäller $P(n)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots.$

Alternativ utan induktion: Ett tal är jämnt delbart med 9 om och endast om talets siffersumma (i basen 10) är jämnt delbart med 9. Men talen $10^n + 8$ är av typ $18, 108, 1008$ osv. som alla har siffersumman 9.

b. Visa att $n^2 - 3$ inte är jämnt delbart med 10 för $n = 2, 3, 4, \ldots$

Ett tals kvadrat slutar på samma siffra som kvadraten på dess sista siffra gör.
Ex.vis slutar 1122334^2 på siffran 6 eftersom 4^2 slutar på 6.
Undersökning av $0^2, 1^2, \ldots 9^2$ visar att kvadrater kan sluta på 0,1,4 ,5 , 6 och 9. Alltså inte på 2,3,7 och 8.
Men $n^2 - 3$ är jämnt delbart med 10 om och endast om n^2 slutar på 3, vilket alltså är omöjligt. VSB.

10. Nej , det är inte nödvändigtvis sant att $\frac{d}{dx}G(x) = O(x^{n-1})$
Motexempel: Låt $G(x)$ definieras av att

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$G(x)$ är av typ $O(x^2)$, eftersom $\sin(1/x)$ är begränsad.
$G(x)$ är också deriverbar överallt.
För $x = 0$ visas detta av:
$G'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.

Men för $x \neq 0$ gäller $G'(x) = 2x \sin 1/x + x^2(\cos(1/x) \cdot (-1/x^2) = 2x \sin 1/x - 2\cos(1/x)$,som är av typ $O(1) = O(x^0)$ och inte $O(x)$.