Lösningar till tentamen i Matematik I. 5B1115. 031110

1) Antingen: $(1-x)(1+x+\dots+x^N)=1+\cancel{x}-\cancel{x}\pm\dots-x^{N+1}$

eller via induktion: $x^0=1=\frac{1-x}{1-x}$ $(N=0)$;

$$\sum_{m=0}^{N+1}x^m=\sum_{m=0}^{N}x^m+x^{N+1}=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}+x^{N+1}=\frac{1-x^{N+1}+x^{N+1}(1-x)}{1-x}$$

2. $$A=\pi\int_{-a}^{a}y^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\pi b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=\underline{\frac{4\pi ab^2}{3}}$$

3) $f(x):=\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)-x\le 0$ (då $x\geqslant 0$), eftersom

$f(0)=0$, $f'(x)=\frac{1+x}{1+x+\frac{x^2}{2}}-1=\frac{\cancel{1}+\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{x}-\frac{x^2}{2}}{1+x+\frac{x^2}{2}}<0$ $(x>0)$

$\Rightarrow f$ monoton avtagande $\Rightarrow f(x\geqslant 0)\le f(0)=0$

(Alternativ: e-funktionen är monoton, och

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\underbrace{\frac{x^3}{6}+\dots}_{\geqslant 0}\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}=e^{\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}$)

4) $$\int_0^1\frac{x^2\,dx}{x^2+2x+1}=\int_0^1\frac{x^2}{(x+1)^2}dx\underset{\substack{u=x+1\\du=dx}}{=}\int_1^2\frac{(u-1)^2}{u^2}du$$

$$=\int_1^2\left(1-\frac{2}{u}+\frac{1}{u^2}\right)du=\left(u-2\ln u-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

5) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\left(1-x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)-\left(x^2-\frac{x^4}{2}+O(x^6)\right)}{2x^3+O(x^6)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+O(x^4)}{2x^3+O(x^6)}=-\frac{1}{2}$$

6) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$, $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}-\frac{2x^4}{(x^4+1)^{3/2}}=\frac{1-x^4}{(x^4+1)^{3/2}}>0$ $(x\in(-1,+1))$

$=0: x=\pm 1$

$f(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\text{MAX}$, $f(-1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\text{MIN}$

(eller: en kontinuerlig funktion antar MAX och MIN i ett kompakt intervall)

7) Den allmänna (reella) lösningen till den homogena ekvationen ($y''+9y=0$) är $y_h(x)=A\cos 3x+B\sin 3x$

(eftersom $y=e^{\lambda x}\to\lambda^2+9=0$, $\lambda_\pm=\pm i3$) $(A,B\in\mathbb{R})$

För att hitta en partikulär lösning till den inhomogena ekvationen, $y''+9y=10e^{-x}+6\sin 3x$, dela upp problemet:

$y=y_1+y_2$, $y_1''+9y_1=10e^{-x}$, $y_2''+9y_2=6\sin 3x$.

$y_1=C\cdot e^{-x}\to C+9C=10\Rightarrow y_1(x)=e^{-x}\ (+y_h(x))$

$y_2=C(x)\cos 3x+D(x)\sin 3x=(\alpha x+\beta)\cos 3x+(\gamma x+\epsilon)\sin 3x$

(Resonans!) $y_2'(x)=(\alpha+3(\gamma x+\epsilon))\cos 3x+(\gamma-3(\alpha x+\beta))\sin 3x$

$y_2''(x)=\cos 3x\cdot(6\gamma-9(\alpha x+\beta))+\sin 3x\cdot(-6\alpha-9(\gamma x+\epsilon))$

$\Rightarrow y_2''+9y_2=6\gamma\cos 3x-6\alpha\sin 3x\overset{!}{=}6\sin 3x\Rightarrow\gamma=0,\ \alpha=-1$

$\Rightarrow y_2(x)=-x\cos 3x\ (+y_h)$; $y(x)=e^{-x}-x\cos 3x+A\cos 3x+B\sin 3x$

8) $a_n=\frac{na^n}{n^2+1}$; $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(a\frac{(n+1)(n^2+1)}{((n+1)^2+1)\cdot n}\right)=a\Rightarrow$

(d'Alembert)

konvergent om $0\leq a<1$, divergent om $1\underset{(=)}{\leq}a<\infty$

Gauss–Raabe

9) $I := \int_{-\infty}^{+\infty} (f''g + 2f'g' + fg'')\,dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} (f'g + fg')'\,dx = (f'g + fg')\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0,$

eftersom $f'g + fg' \to 0$, $x \to \pm\infty$.

(Om man vill bevisa $I = 0$ med hjälp av partiell integration, måste man skriver I som $\lim_{\Lambda\to\infty} \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} (f''g + 2f'g' + fg'')\,dx$, och sedan

$\int_{-\Lambda}^{+\Lambda} f''g = f'g\Big|_{-\Lambda}^{+\Lambda} - \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} f'g'\,dx, \quad \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} fg'' = \ldots,$

$I = \lim_{\Lambda\to\infty} \left(f'g\Big|_{-\Lambda}^{+\Lambda} + fg'\Big|_{-\Lambda}^{+\Lambda} \right) = 0,$

eftersom det finns funktioner f, g sådana att $\int_{-\infty}^{+\infty} f''g\,dx$ eller $\int_{-\infty}^{+\infty} fg''\,dx$ inte existerar, men I existerar.

t.ex om $f(x) = \frac{\sin x^3}{x^2+1} = g(x)$).

10) a) $\lim\limits_{x\searrow 1} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-1} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\searrow 1}(3x^2-12x+11) = 2$

$\Rightarrow$ f är kontinuerlig om $2 \overset{!}{=} (x^2+ax+b)\Big|_{x=1} = 1+a+b$

dvs $a+b=1$.

b) $(x^3-6x^2+11x-6):(x-1) = x^2-5x+6 \quad (x>1)$

$\Rightarrow$ $a=-5$, $b=6$ (Rita $f(x)$!)

($\lim\limits_{h\searrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f_+'(1) = (2x-5)\Big|_{x=1} = -3$

$\lim\limits_{h\nearrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f_-'(1) = (2x+a)\Big|_{x=1} = 2+a$

$\Rightarrow a=-5 \underset{a+b=1}{\Rightarrow} b=+6$)

(obs. f differentierbar $\Rightarrow$ f kontinuerlig)