1) $n=4: \; 1+3+5+7=16=4^2$

$1+3+5+\dots+(2(N+1)-1) = (1+3+5+\dots+(2N-1)) + (2N+1)$

$= N^2 + (2N+1) = (N+1)^2.$

Eller: $1+3+5+\dots+(2n-1)$

$+(2n-1)+\dots \qquad +1$

$= 2n+2n+\dots+2n = n\cdot(2n) = 2n^2.$

Eller: $1+3+5+\dots+(2n-1) = (1+0)+(1+2)+\dots+(1+2(n-1))$

$= n\cdot 1 + (0+2+\dots+2(n-1)) = n + 2(1+2+3+\dots+(n-1)) =$

$\dots = n + 2\cdot\frac{(n-1)}{2}\cdot n = n+(n-1)n = n^2$

2) $\sqrt{1+y} = 1 + y/2 - y^2/8 + O(y^3)$

$\Rightarrow x\sqrt{1+x^2} = x\left(1+\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots\right) = x + \frac{x^3}{2} + O(x^5).$

Eller: $f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{4} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + O(x^5) = \dots = x + \frac{x^3}{2} + \dots$

3) $\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$\Rightarrow A+B=1, \; -2A-B=0 \Rightarrow A=-1, B=2$

$\Rightarrow \int_3^4 \frac{x\,dx}{x^2-3x+2} = -\int_3^4 \frac{dx}{x-1} + 2\int_3^4 \frac{dx}{x-2} = -\ln(x-1)\Big|_3^4 + 2\ln(x-2)\Big|_3^4$

$= -\ln 3 + \ln 2 + 2\ln 2 - 2\ln 1$

$= 3\cdot\ln 2 - \ln 3 \quad (= \ln 2 + \ln 4/3 > 0)$

4) $y_h'' + 8y_h' + 7y_h = 0 \implies y_h(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-7x}$
$(\lambda^2 + 8\lambda + 7 = (\lambda+1)(\lambda+7))$

$y_p'' + 8y_p' + 7y_p = e^x \longrightarrow$ Ansats $y_p = \gamma \cdot e^x$ $\quad y_p(x) = \frac{1}{16} e^x$

$\Rightarrow y(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{-7x} + \frac{1}{16} e^x$

5) a) $\sum_1^\infty \left(\frac{1}{7}\right)^n = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{7}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{7}} - 1 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$

b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{7^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{7^n}{n!} - 1 = e^7 - 1$

c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(1/7)^n}{n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{7}\right) = -\ln\frac{6}{7} = \ln 7/6$
$\left(= \ln(1 + 1/6) = 1/6 - \frac{1}{2}(1/6)^2 + \frac{1}{3}(1/6)^3 - \dots \right)$

---

6) $\lim_{h \to 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\left(\frac{\sin h^2}{h} + 1\right) - c}{h} \right)$

$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin h^2}{h^2} + \frac{1-c}{h} \right)$ existerar $\iff c = 1$

7) $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \underset{(u=\sqrt{x})}{=} 2 \cdot \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{1+u} du \underset{(v=1+u)}{=} 2\int_1^2 \frac{\ln v}{v} dv$

$= \int_1^2 \left((\ln v)^2\right)' dv = (\ln v)^2 \Big|_1^2 = (\ln 2)^2$

8) $f'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{3}{x^2} - 1 \overset{!}{=} 0 \underset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} x^3 - 3x + 2 = 0$

$\Longleftrightarrow x = 1$ eller $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) \overset{!}{=} 0$

(eftersom $x^3 - 3x + 2 : (x-1) = x^2 + x - 2$)

$\Longrightarrow$ möjliga extrempunkter är $x_0 = 1$, $x_\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$f''(x) = \frac{6}{x^4} - \frac{6}{x^3}$; $f''(x_-) = f''(-2) > 0 \Longrightarrow$ MIN

$f'(x) = \frac{-1}{x^3}(x^3 - 3x + 2) = \frac{-1}{x^3}(x-1)^2(x+2) \begin{cases} < 0 \text{ i } (-3,-2) \\ > 0 \text{ i } (-2,-1) \end{cases}$

$\Longrightarrow$ randpunkterna -1 och -3 är lokala Maximipunkter!

$f''(1) = 0 \Longrightarrow$ Ingen extrempunkt i $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

9) $I_\alpha(\Lambda) := \int_1^\Lambda \frac{dx}{x^\alpha} \overset{(\alpha\neq 1)}{=} \frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha+1} \Big|_1^\Lambda = \frac{1}{1-\alpha}\left(\Lambda^{1-\alpha} - 1\right)$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \left(:= \lim_{\Lambda\to\infty} I_\alpha(\Lambda)\right)$ är konvergent $\Longleftrightarrow \alpha > 1$

$\widetilde{I}_\beta(\epsilon) := \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^\beta} \overset{(\beta\neq 1)}{=} \frac{1}{1-\beta} x^{-\beta+1} \Big|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-\beta}\left(1 - \epsilon^{1-\beta}\right)$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} \left(:= \lim_{\epsilon\to 0} \widetilde{I}_\beta(\epsilon)\right)$ är konvergent $\Longleftrightarrow \beta < 1$

((*): $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ och $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ är divergenta, eftersom

$I_1(\Lambda) = \int_1^\Lambda \frac{dx}{x} = \ln\Lambda$; $\widetilde{I}_1(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = -\ln\epsilon$)

10) $2(y''''\cdot y - y'''y') + ((y''^2) - y^2) \overset{(*)}{=} 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ldots) = 2y'''''\cdot y - 2y'y = 2y(y''''' - y') \overset{!}{=} 0$

$\underset{y\neq 0}{\Rightarrow} \underset{(**)}{y''''' - y' = 0}$: $\lambda^5 - \lambda = \lambda(\lambda^4 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ eller $\lambda = \pm 1$

eller $\lambda = \pm i$

$\Rightarrow$ den allmänna reella lösningen till (**) är

$\tilde{y}(x) = a + be^x + ce^{-x} + d\cos x + e\sin x$

$(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$

För att hitta lösning(ar) till (*)
måste man välja speciella(!) a, b, c, d, e,
t.ex. $b = c = \frac{1}{2}$, $a = \sqrt{2}$, $d = 0 = e$:

$y = \sqrt{2} + \cosh x \Rightarrow y' = y''' = \sinh x$, $y'' = y'''' = \cosh x$

$2(\cosh x(\cosh x + \sqrt{2}) - \sinh^2 x) + (\cosh^2 x - (\cosh x + \sqrt{2})^2)$

$= 2(\cosh^2 x - \sinh^2 x) - 2 = 0$.

Den allmänna lösningen till (*) är $\tilde{y}(x)$
med $4bc + d^2 + e^2 = \frac{a^2}{2}$
(Sätt in $\tilde{y}(x)$ i (*))

Speciellt:
$b\cdot e^x$ och $c\cdot e^{-x}$

Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2005-10-20, kl. 14^{00}–19^{00}.

5B1115 Matematik 1, för Media1.

Skriv namn och födelsenummer på varje blad. Endast en uppgift per blad.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs preliminärt minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

Inga hjälpmedel!

1. Bevisa att
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$
för alla naturliga tal $n \geq 4$. (3p)

2. Bestäm Taylorutvecklingen av fjärde graden av funktionen
$$f(x)=x\sqrt{x^2+1}$$
kring $x=0$. (3p)

3. Beräkna
$$\int_3^4 \frac{x\,dx}{x^2-3x+2}.$$
(3p)

4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen
$$y''+8y'+7y=e^x.$$
(3p)

5. Vilka av de oändliga serierna

a) $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\cdots,$

b) $7+\frac{7^2}{2!}+\frac{7^3}{3!}+\cdots,$

c) $\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3}+\cdots,$

konvergerar och mot vilka värden? (3p)

V.g. vänd!