Dagens 15/12

1. För en linjär avbildning T: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att T(2,-1) = (1,3) och T(-1,1) = (1,1). Bestäm matrisen [T] för T.

   Tips: Antag att $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Lös ekvationssystemet $[T]\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $[T]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Låt $T_{\mathbf{A}}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ vara multiplikation med matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   a. Undersök om $\mathbf{v}$ = (1,1,0) tillhör bilden av $\mathbf{R}^2$ (dvs undersök om det finns någon vektor $\mathbf{u}$ i $\mathbf{R}^2$ sådan att $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.

   b. Undersök om $\mathbf{v}$ = (1,1,1) tillhör bilden av $\mathbf{R}^2$.

   c. Undersök om $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$ avbildas på en punkt (w_1, w_2, w_3) som ligger i planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$.

   d. Visa att varje punkt i planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$ är bild av någon punkt i $\mathbf{R}^2$. (c och d tillsammans innebär att hela $\mathbf{R}^2$ avbildas på hela planet $w_1 - w_2 + w_3 = 0$ eller, som man säger, planet är bilden av $\mathbf{R}^2$.)

   e. Visa att $T_{\mathbf{A}}$ är en-entydig (dvs visa att om $\mathbf{u} \neq$ v så är $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) \neq T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$. Observera att det räcker att visa att $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = 0$.)

3. Bestäm matrisen för rotationen (i $\mathbf{R}^2$) moturs med vinkel π/3 enligt följande:

   a. Rita en figur med hjälp av vilken du bestämmer bilden av vektorn $\mathbf{e}_x$ under denna rotation.

   b. Upprepa detta med vektorn $\mathbf{e}_y$.

Svar

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

2. a. Ja b. Nej c. Ja

3. $\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ Man får:: a. $\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Dagens 16/12

4. En avbildning $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ges av $T(x,y,z) = (x + 2y + z, x^k + y + 2z, 2x + 3y + 3z)$.
   a. Bestäm k så att T blir en linjär avbildning.
   För detta k-värde
   b. Bestäm standardmatrisen $[T]$.
   c. Verifiera att $T(2,1,0) = (4,3,7)$.
   d. Bestäm alla vektorer $\mathbf{v}$, sådana att $T(\mathbf{v}) = (4,3,7)$.
   e. Ange, som en slutsats av resultatet i d, värdet av $\det([T])$.
   f. Finns det någon vektor $\mathbf{v}$ sådan att $T(\mathbf{v}) = (3,7,4)$?

5. Låt $T_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara multiplikation med matrisen $\mathbf{A}$. Undersök om $T_{\mathbf{A}}$ är inverterbar och om så är fallet bestäm inversen till $T_{\mathbf{A}}$ då
   a. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. b. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. Undersök om vektorn (2,1,0,-1) tillhör värdemängden av avbildningen $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, där $T(x,y,z) = (2x + y + z, x - y + 2z, y - z, x + 2y + z)$.

7. Undersök sanningshalten i följande påståenden:
   För varje linjär avbildning $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ och för godtyckliga vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbf{R}^2$ gäller att
   a. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala så är också $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ ortogonala.
   b. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är ortogonala så är heller inte $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ ortogonala.
   c. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är parallella så är heller inte $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ parallella.
   d. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella så är också $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ parallella.

8. Låt $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara rotationen moturs med vinkeln $\pi/4$. Bestäm bilden av
   a. punkten (2,4).
   b. linjen $y = 2x$.
   c. ellipsen $9x^2 + y^2 = 1$.
   d. hyperbeln $9x^2 - y^2 = 1$
   e. parabeln $y = x^2$.
   Tips cde: Bestäm den inversa rotationen på formen $(x,y) = T^{-1}(w_1, w_2)$ och substituera $x = \ldots$ och $y = \ldots$ i den givna ekvationen.

9. Två linjära avbildningar T och S, av typen $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, ges enligt följande: $T(x,y) = (x + y, x - y)$ och $[S] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm matriserna för avbildningarna $\frac{1}{2}T \circ S$ och $\frac{1}{2}S \circ T$ samt tolka dessa geometriskt.

<u>Svar</u>

4. a. $k = 1$ b. $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ d. $\mathbf{v} = (2 - 3t, 1 + t, t)$. e. 0. f. Nej

5. a. Ej inverterbar.
   b. Inverterbar och $T_{\mathbf{A}}^{-1}(x, y, z) = T_{\mathbf{A}^{-1}}(x, y, z) = (z - x, x + y - 2z, x - y + z)$

6. Tillhör värdemängden.

7. a. Lögn! Om T är projektionen på x-axeln samt $\mathbf{u} = (1,1)$ och $\mathbf{v} = (1,-1)$, så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala, men $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ inte.
   b. Lögn! Om T är projektionen på x-axeln samt $\mathbf{u} = (1,1)$ och $\mathbf{v} = (0,1)$, så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte ortogonala, medan $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ är det.
   c. Lögn! Exemplet i svaret till a visar att $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ kan vara parallella även om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är det.
   d. Sant! Antag att [TI = $[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = (x,y)$. Om $\mathbf{v}$ är parallell med $\mathbf{u}$ så är $\mathbf{v} = (tx,ty)$ för något tal t. Verifiera att $T(\mathbf{u}) = tT(\mathbf{v})$, dvs $T(\mathbf{u})$ och $T(\mathbf{v})$ är parallella.

8. a. $(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ b. $w_2 = -3w_1$ c. $5w_1^2 + 8w_1w_2 + 5w_2^2 = 1$
   d. $4w_1^2 + 10w_1w_2 + 4w_2^2 = 1$ e. $w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2 + \sqrt{2}w_1 - \sqrt{2}w_2 = 0$

9. $\frac{1}{2} T \circ S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ är spegling m.a.p. x-axeln. $\frac{1}{2} S \circ T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ är spegling m.a.p. linjen $x = y$.

Dagens 17/12

10. a. Visa att vektorn $\mathbf{u} = (1,2,3,4)$ är en linjär kombination av vektorerna $\mathbf{v} = (1,2,2,3)$ och $\mathbf{w} = (1,2,1,2)$. (Dvs, visa att det finns konstanter a och b sådana att $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$.)
    b. Ar vektorn $\mathbf{u} = (2,3,4,5)$ en linjär kombination av vektorerna $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$?

11. Avgör om följande vektorer är linjärt oberoende eller ej:
    a. (1,3,2,2), (1,0,-1,1), (1,1,0,0). (Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är linjärt oberoende om likheten $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ inträffar endast för $a = b = c = 0$.)
    b. (1,3,2,-2), (1,0,-1,1), (1,1,0,0).
    c. (1,3,2), (2,1,1).
    d. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,3).
    e. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,2).
    f. (1,3,2), (2,1,1), (3,4,2), (3,4,3).

12. Undersök om vektorerna c.-f. i uppgiften 18 bildar en bas i $\mathbf{R}^3$.

13. För en linjär avbildning $T{:}\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,1) = (3,7)$ och $T(2,1) = (4,10)$. Bestäm $T(1,2)$.

    Tips: Skriv (1,2) som en linjär kombination av (1,1) och (2,1), dvs bestäm a och b så att $(1,2) = a(1,1) + b(2,1)$. Lineariteten av T medför att $T(1,2) = aT(1,1) + bT(2,1)$.

14. För en linjär avbildning $T{:}\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller att $T(1,1) = (7,3)$ och $T(2,1) = (10,4)$. Bestäm den vektor (vektorer) $\mathbf{v}$ för vilken $T(\mathbf{v}) = (4,2)$.

    Tips: Skriv (4,2) som en linjär kombination av (7,3) och (10,4), dvs bestäm a och b så att $(4,2) = a(7,3) + b(10,4)$. Lineariteten av T medför att $T(4,2) = aT(7,3) + bT(10,4)$.

15. Bestäm matrisen [T] för den linjära avbildningen $T{:}\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ för vilken $T(\mathbf{e}_x) = (1,3,2)$, $T(\mathbf{e}_y) = (1,2,1)$ och $T(2,1,-1) = (2,7,4)$.

    Ledning: Skriv $\mathbf{e}_z$ som en linjär kombination av $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ och (2,1,-1), dvs bestäm a, b och c så att $\mathbf{e}_z = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c(2,1,-1)$ Lineariteten av T medför att, $T(\mathbf{e}_z) = aT(\mathbf{e}_x) + bT(\mathbf{e}_y) + c(T(2,1,-1))$.

Svar

10. b. Nej.

11. a. linjärt oberoende. b. linjärt beroende. c. linjärt oberoende.
    d. linjärt beroende. e. linjärt oberoende. f. linjärt beroende.

12. c. bildar inte en bas. d. bildar inte en bas. e. bildar en bas.
    f. bildar inte en bas.

13. (5,11). 14. (0,1). 15. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Dagens 19/12

16. Undersök vilka av följande matriser beskriver en transformation mellan två baser:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

17. Bestäm transformationsmatrisen för övergången från
    a. basen $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ till basen $\mathbf{f} = \{2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, 4\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2\}$ (den nya basen **f** består alltså av vektorerna $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ med koordinaterna (2,3) respektive (4,5) i den gamla basen **e**).
    b. basen $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$ till basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
    c. basen $\{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ till basen $\{\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\}$.

18. a. Vektorn **v** har i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ koordinaterna (2,1). Vilka är koordinatema för **v** i basen $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$?
    b. Vektorn **v** har i basen $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$ koordinaterna (3,4). Vilka är koordinaterna för **v** i basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$}?

19. I *xy*-planet införs nya *uv*-koordinater genom att man tar vektorerna $\mathbf{f}_1 =$ (1,3) och $\mathbf{f}_2 =$ (2,1) som nya basvektorer. Vilken är ekvationen i det nya koordinatsystemet för den räta linje som i det ursprungliga systemet har ekvationen $2x + y = 5$?

20. I *xy*-planet införs nya uv-koordinater genom att man tar vektorerna $\mathbf{f}_1 =$ (1,2) och $\mathbf{f}_2 =$ (2,5) som nya basvektorer. En rät linje har i det nya systemet ekvationen $u + v = 1$. Vilken är linjens ekvation i det ursprungliga systemet?

21. I $\mathbf{R}^2$ med basvektorer $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ väljs vektorerna med koordinaterna (4,3) respektive (3,2) som nya basvektorer $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.
    a. Vilka är koordinaterna i det nya systemet för den vektor **v** som i det gamla systemet har koordinaterna (2,1)?
    b. Vilka är koordinaterna i det gamla systemet för den vektor **v** som i det nya systemet har koordinaterna (1,-1)?
    c. Vilken är ekvationen i det nya systemet for den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x - y = 2$?

Svar

16. Endast matrisen i c.

17. a. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

18. a. (3,-1) b. (7,11). 19. $u + v = 1$. 20. $3x - y = 1$.

21. a. (-1,2) b. (1,1) c. $u + v = 2$