Dagens 16/2

1. Visa att det i en omgivning av punkten (1,1,1) finns precis en funktion $z = z(x,y)$ som uppfyller ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x^2 z - yz - z = 2$ och sådan att $z(1,1) = 1$. Bestäm for denna funktion:
   a. $z'_x(1,1)$ och $z'_y(1,1)$
   b. grad $z(1,1)$
   c. riktningsderivatan i punkten (1,1) i riktning av vektorn **v** = (2,-6).

2. Visa att funktionen $\mathbf{f}(x,y) = \begin{cases} u = 2x + \sin y \\ v = \sin x + y + 1 \end{cases}$ är lokalt inverterbar. Beräkna, i punkten $(u,v) = (0,1)$, de partiella derivatorna $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ och $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ samt inversens Jacobimatris.

3. Visa at ekvationssystemet $\begin{cases} xy^2 + yz^2 + zx^2 = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$ definierar i en omgivning av punkten (0, 1,2) precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $y = y(x)$ och $z = z(x)$ sådana att $y(0) = 1$ och $z(0) = 2$

4. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till följande funktioner:
   a. $f(x,y) = 2\ln(x - 2y) + e^{2x-6y}$ kring punkten (3,1).
   b. $f(x,y) = e^{x-1}\cos(x - y)$ kring punkten (1,1).

5. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till funktionen $f(x,y) = 8\sqrt{x} + 2\cos(2x - y)$ kring punkten (1,2). Använd detta polynom för att beräkna ett approximativt värde av $f(1.1,2.2)$.

6. Visa att ekvationen $z^3 - 2xz + y = 0$ definierar i en omgivning av punkten (1,1,1) precis en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(1,1)=1$. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till z kring punkten (1,1).

7. Visa att det i en omgivning av punkten (7,7) finns precis två kontinuerligt deriverbara funktioner $z = z(x,y)$ och $w = w(x,y)$ sådana $z(7,7) = 1$, $w(7,7) = 2$ och $\begin{cases} z^2 + 3w = x \\ 3z + w^2 = y \end{cases}$.
   Bestäm Taylorpolynomet av första graden till funktionen z kring punkten (7,7). Bestäm ekvationen till tangentplanet för grafen av funktionen z i punkten (7,7,1).

Svar:

1. a. $z'_x(1,1) = -5/2$, $z'_y(1,1) = -1$ b. grad $z(1,1)=(-5/2,-1)$ c. $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$
2. $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 1$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = 2$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
4. a. $-1 + 4x - 10y + (x-3)^2 - 8(x-3)(y-1) + 14(y-1)^2$
   b. $x + (x-1)(y-1) - \dfrac{1}{2}(y-1)^2$
5. $p(h,k) = 10 + 4h - 5h^2 + 4hk - k^2$, där $h = x - 1$ och $k = y - 2$; $f(1.1,2.2) \approx 10.39$.
6. $1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2$.
7. Taylorpolynomet: $8 - 4x + 3y$. Tangentplanet: $z = 8 - 4x + 3y$.

Dagens 18/2

8. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till följande funktioner:
   a. $f(x,y) = 2xy^2 + x^2 + 4y$
   b. $f(x,y) = 2x + y + 3\sqrt{1 + x^2 + y^2}$
   c. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
   d. $f(x,y) = 3x^3 - 9x + 3y - y^3$.
   e. $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^3$

9. Är det sant att $2x^2 + 3y^2 + 4\sin x \sin y \geq 0$ om (x,y) ligger tillräckligt nära origo?

10. Verifiera att funktionen $f(x,y) = (1+y)^3 x^2 + y^2$ endast har en kritisk punkt och att f antar i denna ett lokalt minimivärde. Ar detta värde funktionens minsta värde?

Svar:

8. a. Det finns inga lokala extrempunkter. Det finns en sadelpunkt (-1,1).
   b. Lokalt minimum i (-1,-1/2).
   c. Lokalt minimum i (1,1). (sadel i (0,0).
   d. Lokalt min i (1,-1), lokalt maximum i (-1,1). (sadel i (1,1) och (-1,-1).)
   e. Lokalt minimum i (2/3,-2/3), (sadel i (0,0).)

9. Ja.

10. Lokal minimum i (0,0). $f(0,0)$ är inte funktionens minsta värde då t.ex $f(0,0) > f(3.-2)$.
(Jämför detta med funktioner av en variabel: Om $f(x)$ endast har en kritisk punkt och om f antar i denna ett lokalt minimivärde så är detta värde funktionens minsta värde.)