Dagens 24/11

1. Bestäm matrisen $(3\mathbf{A}+2A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ där $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

2. Bestäm matrisen $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-2\mathbf{B})\mathbf{A}$ där $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ och $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

3. Bestäm *a, b* och *c* så att $\begin{bmatrix}a & 1 & c\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\ b & b & 2b\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

4. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$ så att $\left(\mathbf{A}-3\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\\ 3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

5. Lös ekvationssystemet $\begin{cases}2\mathbf{A}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 8 & 7\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}+2\mathbf{B}=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 4 & 6\end{bmatrix}\end{cases}$.

   Tips: Transponera ledvis någon ekvation.

6. Lös matrisekvationen $\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ där $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

7. Bestäm alla 2x2-matriser $\boldsymbol{A}$ sådana att $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$.

Svar:

1. $\begin{bmatrix}5 & 8 & 7\\ 7 & 5 & 6\\ 8 & 4 & 0\end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

3. $a=0,\ b=1,\ c=0$

4. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & -3 & 3\\ 6 & 1 & 10\end{bmatrix}$.

5. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$.

7. Alla matriser pa formen $\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$.

Dagens 26/11

8. Visa att matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ är inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   Ledning. För att visa att $\mathbf{A}$ är inversen till $\mathbf{B}$ räcker det att visa att $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

9. Bestäm inverser till följande matriser

   a. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. b. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. För vilka värden på konstanter a och b är matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en invers till matrisen

    $\begin{pmatrix} b & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$?

11. Bestäm inverser till matriser $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ och $\mathbf{A}^2$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$, då $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

13. Bestäm inversen till matrisen $\mathbf{A}(2\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - 3\mathbf{B})$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

14. Lös matrisekvationen $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

    Ledning. Multiplicera ledvis, från vänster med $\mathbf{A}^{-1}$. I vänsterledet får man $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{X}$. Lösningen fås ur $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot$ den givna matrisen.

Svar

9. a. $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

10. $a = 2$ och $b = 0$.

11. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $(\mathbf{A}^{2})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{2} = \begin{bmatrix} 12 & -9 & 4 \\ -14 & 11 & -5 \\ 7 & -6 & 3 \end{bmatrix}$.

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

14. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \\ 11 & 13 & 17 \end{bmatrix}$