Dagens 3/12

1. För vilka reella a är matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ inverterbar?

2. a. För vilka a har ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + y + z + av = 1 \\ x + ay + z + 2v = 2 \\ ax + y + z + 2v = 3 \\ x + y + z + av = 4 \end{cases}$ precis en lösning?

   b. Bestäm för varje a-värde antalet lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a-1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}$.

3. Bestäm $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ då $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Tips: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{BA})^{-1}$.

4. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$ då $(2\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$. Ledning: Transponera ledvis.

5. Beräkna följande determinanter:

   a. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Svar

1. a =/= 4

2. a. a =/= 1 och $a \neq 2$

   b. a =/= -1 och a =/= 3 $\Rightarrow$ en lösning, a = -1 $\Rightarrow$ ingen lösning, a = 3 $\Rightarrow$ oändligt många lösningar

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3/10 & -1/5 \\ 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$

5. a. 5. b. 9. c. 21.

Dagens 5/12

6. Beräkna följande determinanter:

a. $\begin{vmatrix} a+1 & a+3 \\ a & a+2 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} a & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7. a. För vilka reella a är matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ inverterbar?

b. Verifiera att matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ är inverterbar. Beräkna $\det(\mathbf{A}^3\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-2})$.

c. Beräkna $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$ och $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$ då $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

8. a. För vilka a har ekvationssystemet $\begin{cases} 3x + y + z + av = 1 \\ x + ay + z + 2v = 2 \\ ax + y + z + 2v = 3 \\ x + y + z + av = 4 \end{cases}$ precis en lösning?

b. Bestäm för varje a-värde antalet lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a-1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

9. Punkterna A och B delar sträckan mellan punkterna (1,4,2) och (4,1,5) i tre lika delar. Bestäm A och B.

10. Är punkterna (3,7,-2), (5,5,1), (6,-2,2) och (4,0,-1) hörn i en parallellogram?

Svar

6. a. 2 b. 1 c. 1 d. 1

7. a. a =/= 4 b. 36 c. 0 resp 29

8. a. a =/= 1 och a =/= 2.

b. a =/= -1 och a =/= 3 | | en lösning, a = -1 | | ingen lösning, a = 3 | | oändligt många lösningar.

9. (2,3,3) och (3,2,4) 10. Ja