Dagens 9/2

I uppgifterna 1-5 förutsätter vi att funktionen f har kontinuerliga derivator av första och andra ordningen.

1. Funktionen $z(u,v)$ definieras genom $z(u,v) = f(x,y)$ där $x = u + v,\ y = uv$. Verifiera att
   a. $uz'_u + vz'_v = xf'_x + 2yf'_y$
   b. $z''_{uv} = f''_{xx} + y f''_{yy} + xf''_{xy} + f'_y$.

2. Bestäm z''_{uv} då $z = f(x,y),\ x = u^2 + v^2,\ y = uv$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

3. Bestäm $z''_{uu} + z''_{vv}$ då $z = f(x,y),\ x = u^2 + v^2,\ y = u - v$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

4. Bestäm $z''_{uu} + z''_{vv}$ då $z = f(x,y),\ x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2$. Svaret får inte innehålla variabler u och v.

5. En funktion $z(u,v)$ uppfyller ekvationen $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$. Hur förändras denna ekvation om man ersätter funktionen z med funktionen f enligt $z = f(u,v),\ u = x - y,\ v = x + y$?

6. Låt $\mathbf{r}(t) = (t\ln t, \sin 2t \cot t)$. Beräkna $\lim_{t\to 0^+} \mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{r}'(t)$.

7. En partikel rör sig längs kurvan $\mathbf{r}(t) = (2t + t^2, t - t^2, 8t)$. Bestäm partikelns hastighet, fart och accelerationen vid tiden $t = 1$.

.

Svar:

2. $4yf''_{xx} + y f''_{yy} + 2xf''_{xy} + f'_y$
3. $4xf''_{xx} + 2 f''_{yy} + 4 yf''_{xy} + 4 f'_x$
4. $4xf''_{xx} + 4x f''_{yy} + 8yf''_{xy} + 4 f'_x$
5. $f''_{uv} = 0$ (man kan förkorta med 4).
6. $(0,2)$ och $(1 + \ln t, -2\sin 2t)$
7. Hastighet $\mathbf{v}$ = (4, -1, 8). Fart v = 9. Acceleration $\mathbf{a}$ = (2, -2, 0).

Dagens 11/2

8. Bestäm $\mathbf{J}_f$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}(y,z)}$ då $\mathbf{f}(x,y,z) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2, x + 2y + 3z)$.

9. Bestäm Jacobimatriserna till följande funktioner:

   a. $\mathbf{f}(x,y,z) = (xy, x^2y^3, x + 2y)$ b. $\mathbf{f}(x,y,z) = (xy + z^2, x^2y^3z^4)$

10. Beräkna $\mathbf{J}_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}u}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}(u,v)}$ i origo, då $\mathbf{f}: \begin{cases} x = 2u - 3v \\ y = 3u + 2v \\ z = 4uv + 1 \end{cases}$ och $g: \begin{cases} r = xy \\ s = yz \\ t = xz \end{cases}$

11. Visa att ekvationen $x\ln(1 + y^2) + y\sin(xy + 1) = 0$ definierar i en omgivning av punkten (0,0) precis en fnktion $y = y(x)$ sådan att $y(0) = 0$.

Svar:

8. $\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} yz \\ 2x \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}(y,z)} = \begin{pmatrix} xz & xy \\ 2y & 2z \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

9. a. $\begin{pmatrix} y & x \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2xy^3z^4 & 3x^2y^2z^4 & 4x^2y^3z^3 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{J}_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}(u,v)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$