Ex Nollavbildningen $T_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avbildar alla vektorer på $\bar{0}$.

$$T_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \bar{x} = (x, y) \quad T_0(\bar{x}) = O\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (0x + 0y, 0x + 0y, 0x + 0y) = (0, 0, 0)$$

Ex Identitetsoperatorn $T_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avbildar varje vektor på sig själv. $T_E(\bar{x}) = E\bar{x} = \bar{x}$

$T_E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrisen för en linjär avbildning

$\bar{x} = (x, y) = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y$

$T(\bar{x}) = T(x\bar{e}_x + y\bar{e}_y) = xT(\bar{e}_x) + yT(\bar{e}_y)$

dvs $T(\bar{e}_x)$ och $T(\bar{e}_y)$ bestämmer T.

$$\left.\begin{cases} T(\bar{e}_x) = a_{11}\bar{e}_x + a_{21}\bar{e}_y \\ T(\bar{e}_y) = a_{12}\bar{e}_x + a_{22}\bar{e}_y \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ avbildningens standardmatris är

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \left(T_A(\bar{e}_x) \,\vdots\, T_A(\bar{e}_y) \right)$$

Kontroll:

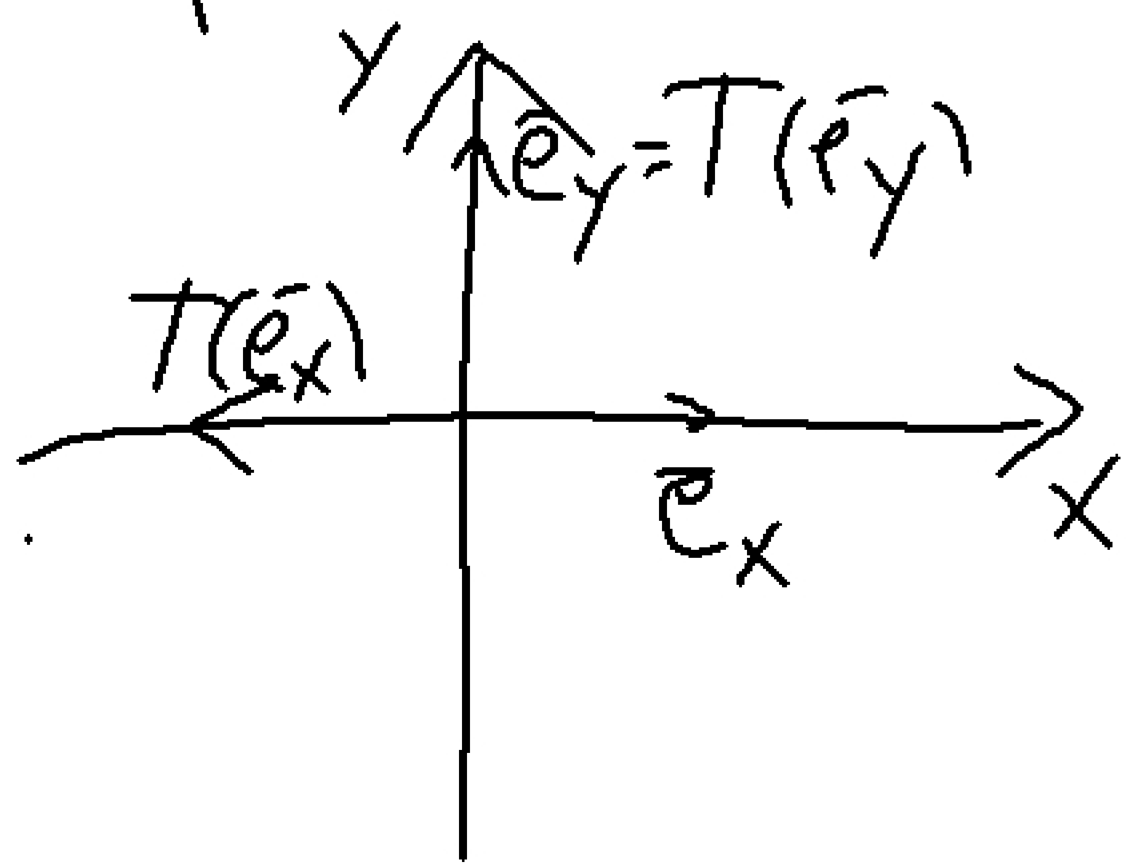
$$A\bar{e}_x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\bar{e}_x + a_{21}\bar{e}_y$$

$$A\bar{e}_y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12}\bar{e}_x + a_{22}\bar{e}_y.$$

Ex <u>Spegling i y-axeln</u>

$$T(\bar{e}_x) = -\bar{e}_x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_y) = \bar{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

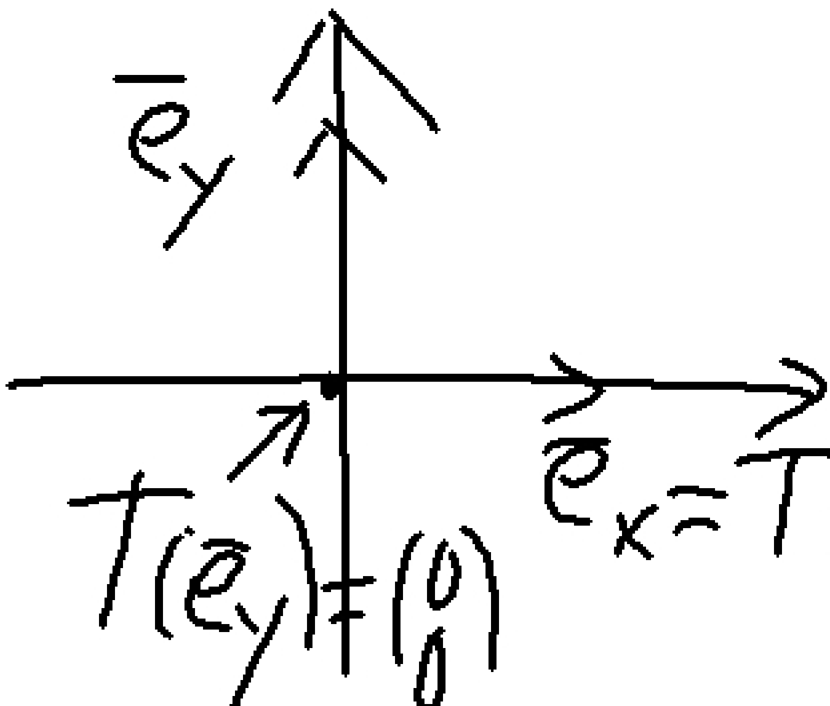


$$A = \left(T(\bar{e}_x) \,\middle|\, T(\bar{e}_y) \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex

Projektion på x-axeln

$$A = \left(T(\bar{e}_x) \,\middle|\, T(\bar{e}_y) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$\bar{e}_y$

$T(\bar{e}_y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

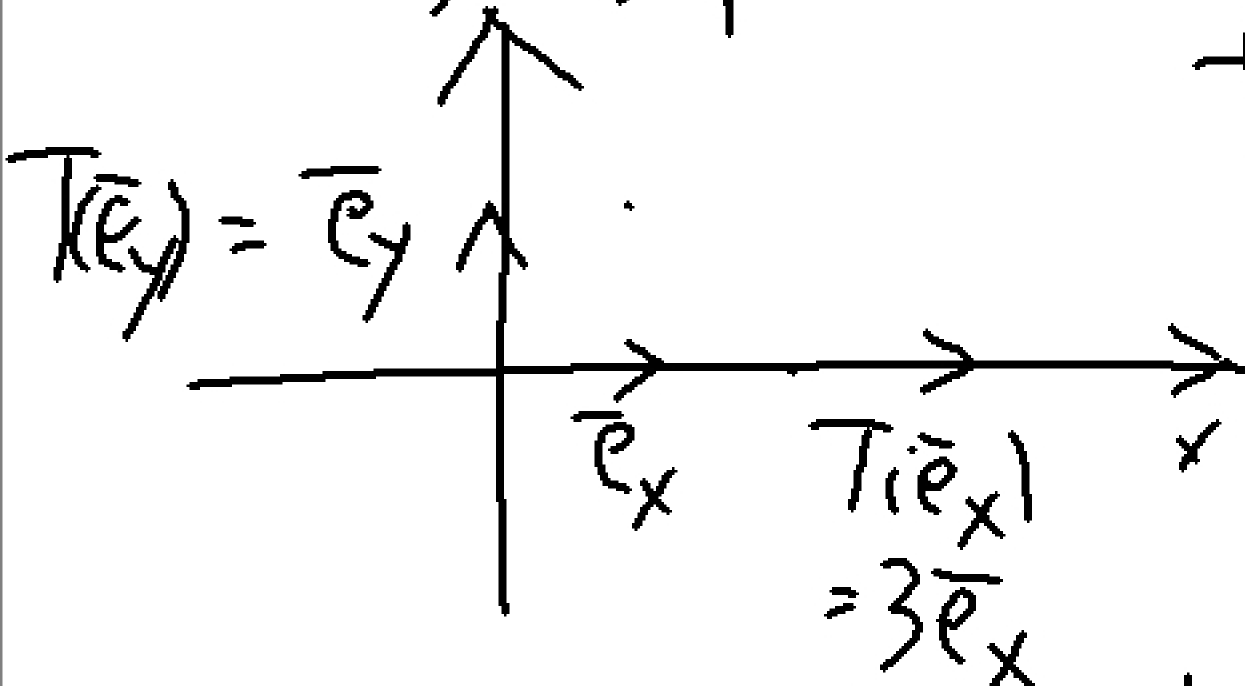
$\bar{e}_x = T(\bar{e}_x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Proj. på y-axeln

$$T(\bar{e}_x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T(\bar{e}_y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

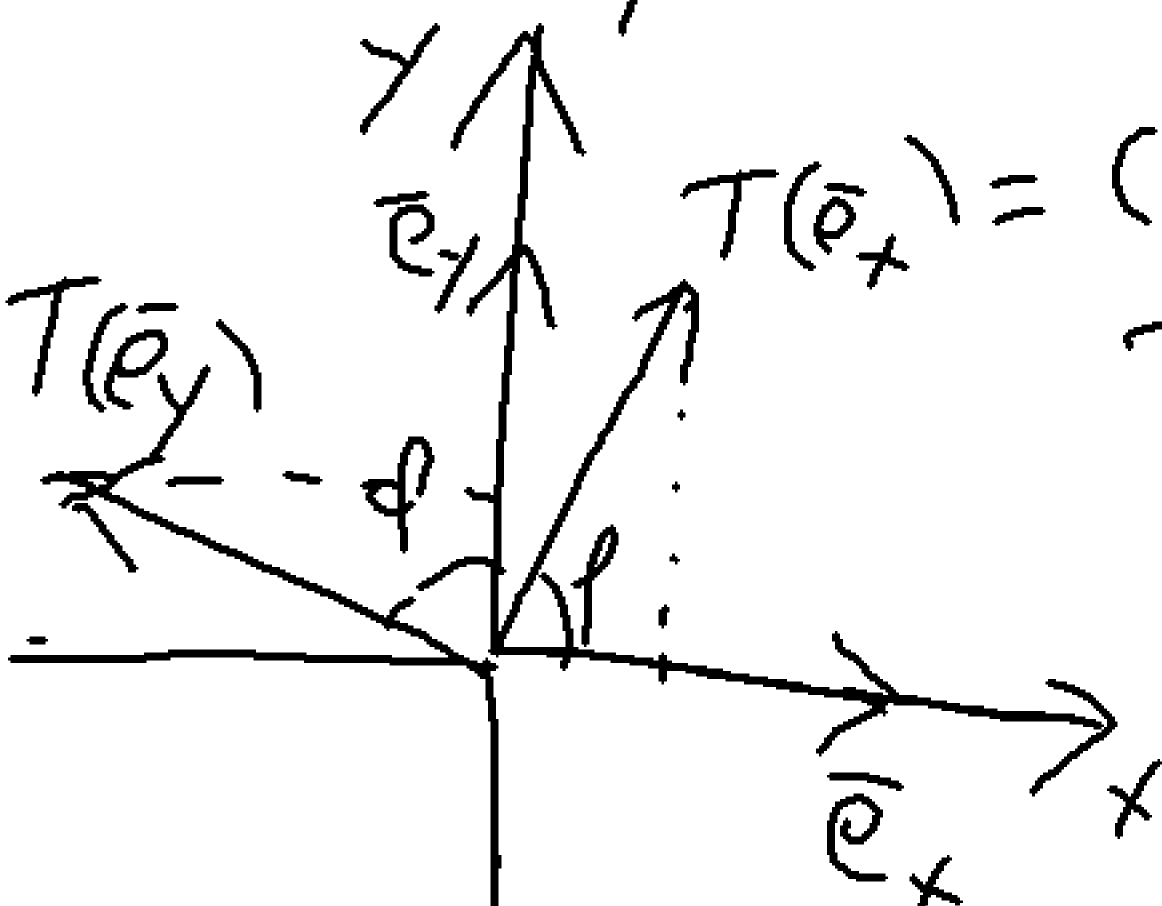
Töjning i planet



Töjning med faktorn 3 i x-led.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vridning vinkeln φ kring origo i $\mathbb{R}^2$

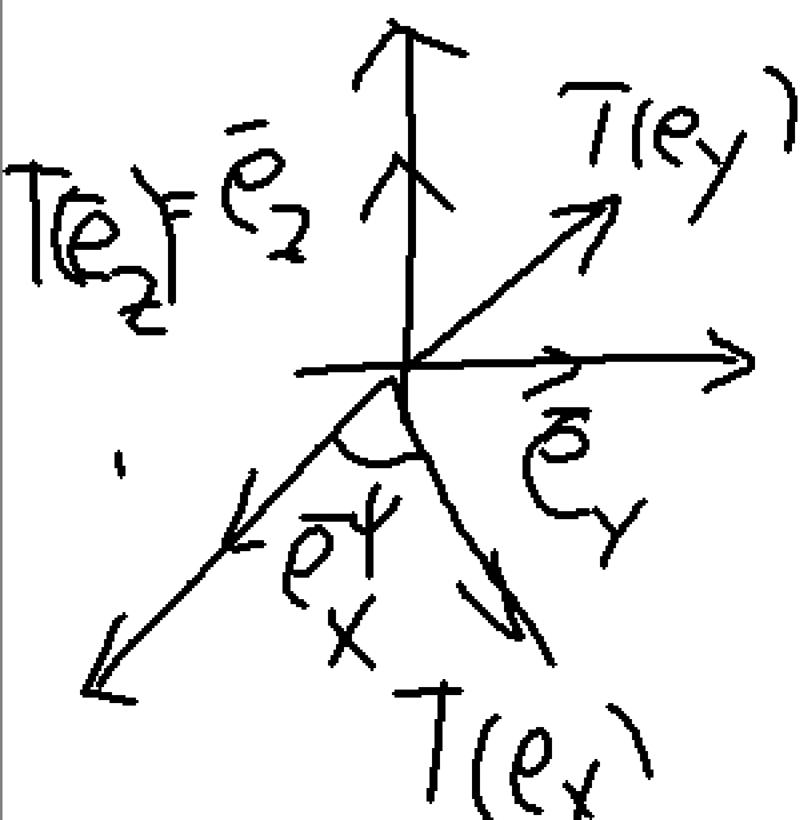


$$T(\bar{e}_x) = \cos\varphi \cdot \bar{e}_x + \sin\varphi\, \bar{e}_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_y) = -\sin\varphi\, \bar{e}_x + \cos\varphi\, \bar{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$[T] = \left(T(\bar{e}_x) \,\middle|\, T(\bar{e}_y)\right) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Vridning av xy-planet vinkeln φ kring z-axeln



$$T(\bar{e}_x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad T(\bar{e}_y) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

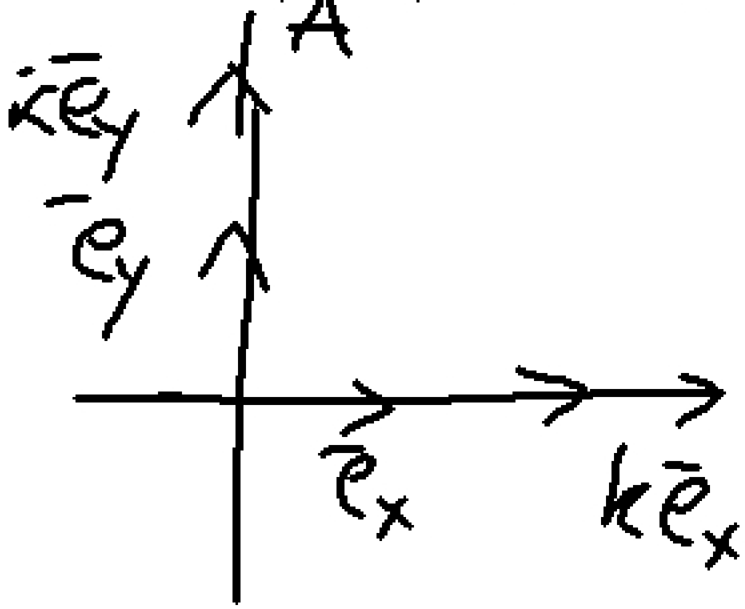
$$T(e_z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [T] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.29) Ange matriserna för avbildningarna i Ex 3.13 - 3.15

E 3.1's Likformighetsavbildningen

$T_A(\bar{x}) = k\bar{x} = k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$A = \left(T_A(\bar{e}_x) \,\middle|\, T_A(\bar{e}_y)\right) = \begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix}$



$k\bar{e}_x = k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix}$

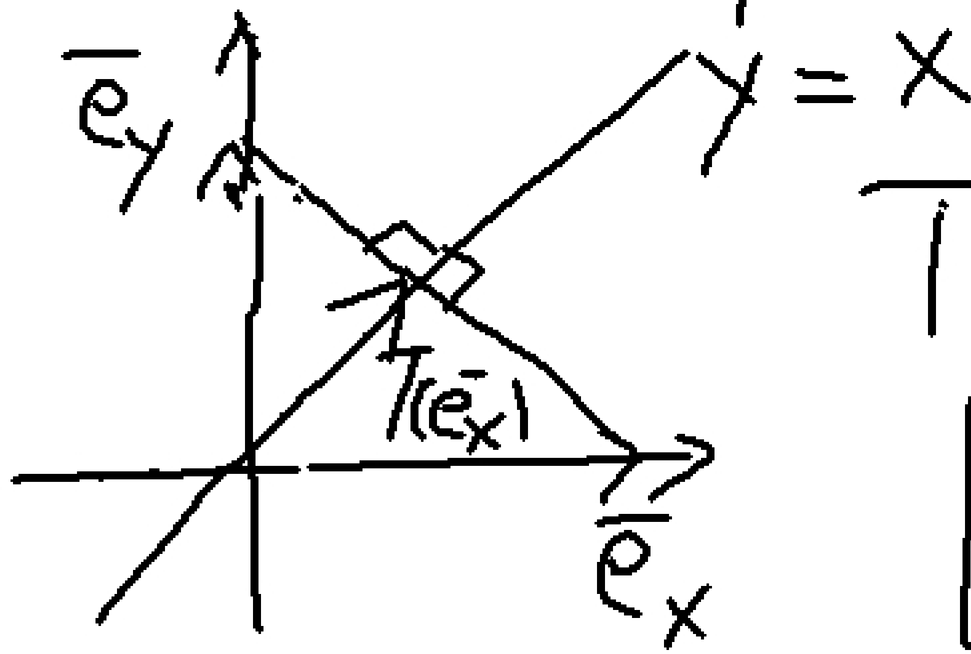
$T_A(x, y) = (kx, ky,$ $k(x, y,$

Ex 3.14 Töjning med faktorn 2 i x-led och $\frac{1}{2}$ i y-led.

$T(\bar{e}_x) = 2\bar{e}_x = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $T(\bar{e}_y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$

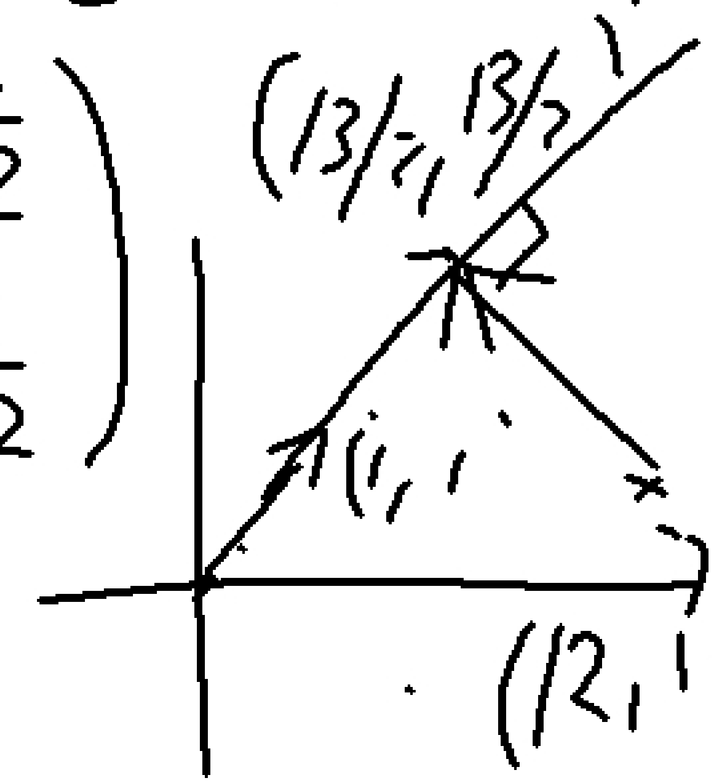
$[T] = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1/2\end{pmatrix}$

Ex 3.15 Projektion på linjen $y=x$.



$$T(\bar{e}_x) = T(\bar{e}_y) = \frac{1}{2}\bar{e}_x + \frac{1}{2}\bar{e}_y$$

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



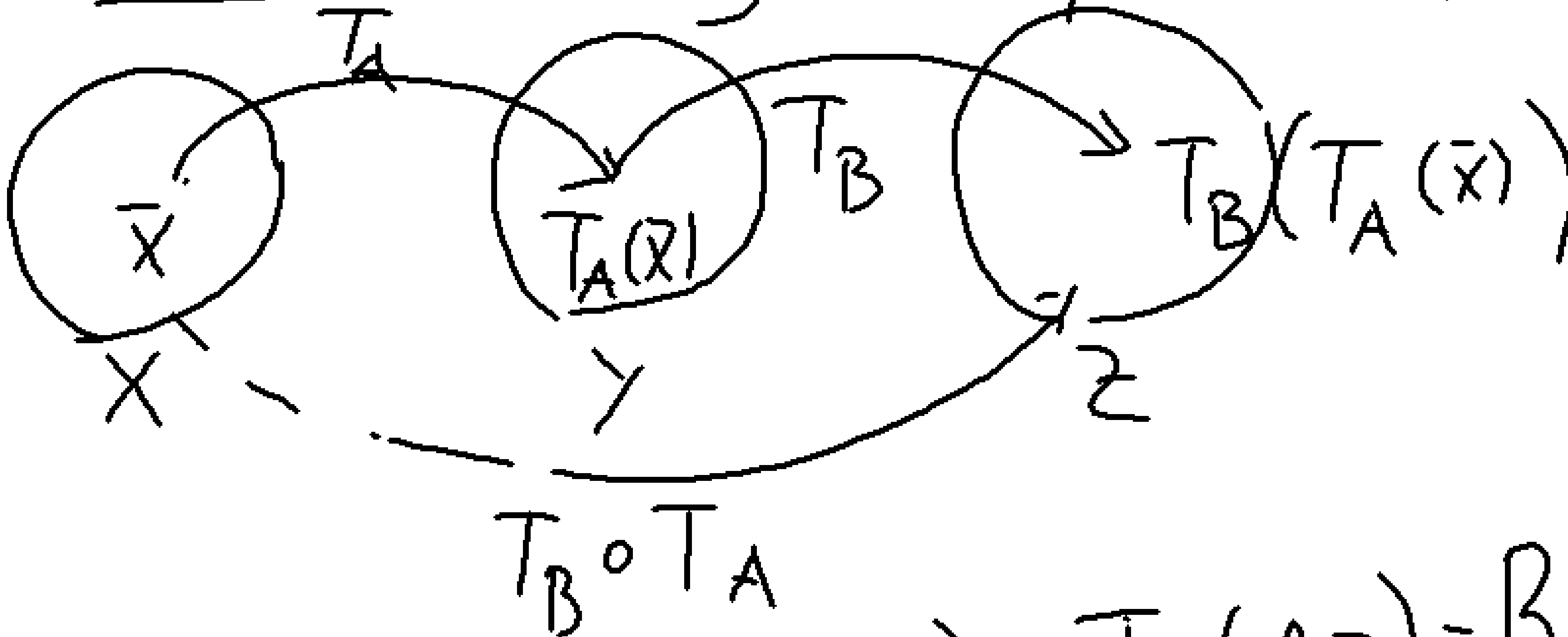
$$T(12,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 13/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right) \cdot (1,1) = -\frac{11}{2} + \frac{11}{2} = 0$$

ok

Sammansättning av linjära avb.



$T_A(\bar{x}) = A\bar{x} \quad T_B(T_A(\bar{x})) = T_B(A\bar{x}) = B(A\bar{x})$

$= (BA)\bar{x} = T_{BA}(\bar{x})$

$T_B \circ T_A$ har standardmatrisen BA

Visa att $T_B \circ T_A$ är linjär

$BA(\bar{x}_1+\bar{x}_2) = B(A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2) = B(A\bar{x}_1) + B(A\bar{x}_2)$

$= (BA)\bar{x}_1 + (BA)\bar{x}_2$

$(BA)(k\bar{x}) = B(A(k\bar{x})) = B(kA\bar{x}) = kB(A\bar{x}) =$

$k(BA)\bar{x}$ Alltså är $T_B \circ T_A$ linjär

3.39) Låt T_φ vara vridningen i planet φ radianer i positiv led kring origo.

a) Vilken innebörd har den sammansatta avbildningen $T_\varphi \circ T_\psi$. Först vrids basvektorer na vinkeln ψ och sedan vinkeln φ. Sammanlagda vridningen är $\psi+\varphi$

b) Bestäm matrisen $A_\varphi A_\psi$ på två sätt.

$$[T_\varphi] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad T_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$[T_\varphi][T_\psi] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = [T_{\varphi+\psi}]$$

Ex Reflektion i linjen $x=y$

$T(\bar{e}_x) = \bar{e}_y \quad T(\bar{e}_y) = \bar{e}_x$

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

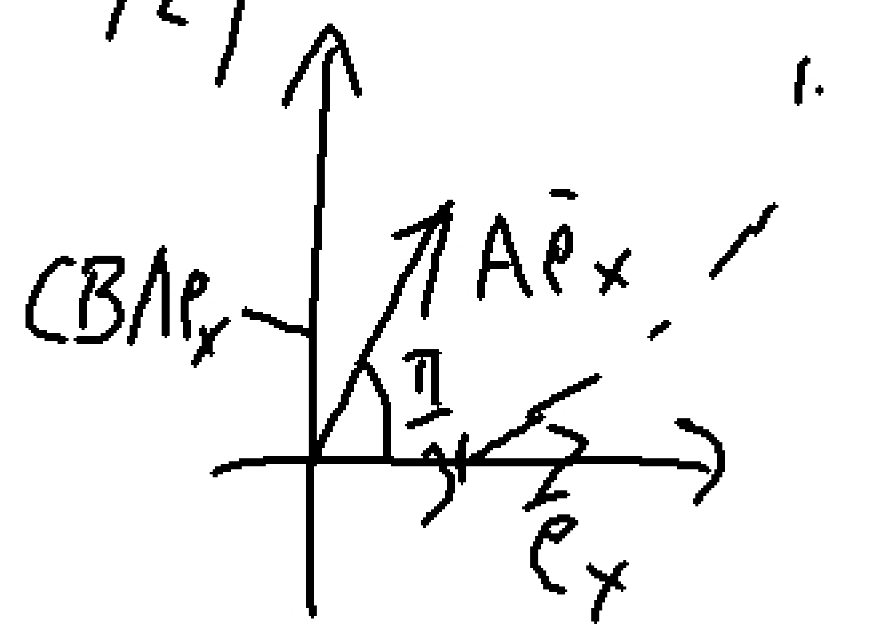
Ex Rotation 60° följt av proj på x-axeln följt av reflektion i linjen $y=x$. Bestäm $[T]$.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

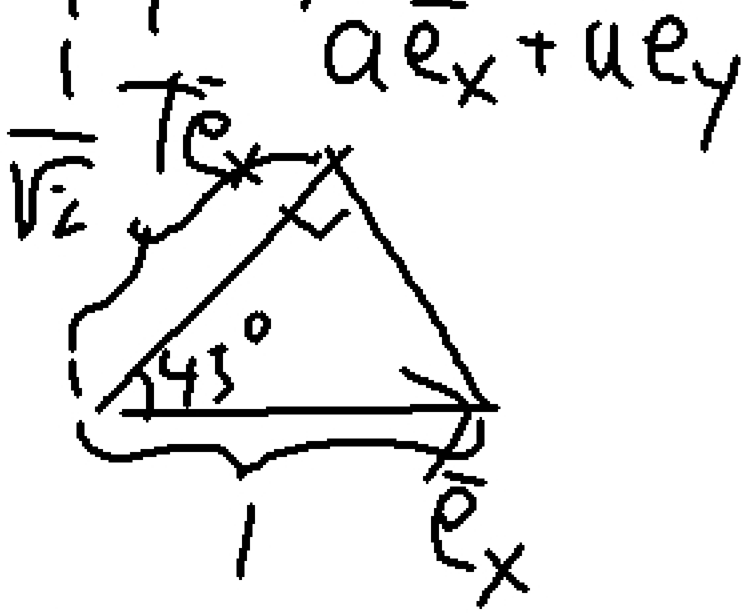
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CBA\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \qquad BA\bar{e}_x$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}} \bar{x}$$



proj på $y=x$



$$|a, a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2a^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad a = \frac{1}{2}$$

<u>Def</u> En linjär avbildning $T: X \to Y$ sägs vara en-entydig, 1-1 om T avbildar olika vektorer i X på olika vektorer i Y. $T(\bar{x}_1) \neq T(\bar{x}_2)$ om $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

<u>Sats</u> A är en $n \times n$-matris och $T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är multiplikation med A. Då är följande påst ekvivale. 1. A är inverterbar. 2. Bildmängden för T_A är $\mathbb{R}^n$. 3. T_A är 1-1.

<u>Bevis</u> 1 $\Rightarrow$ 2) Antag $\bar{y}$ är godtyckl i $\mathbb{R}^n$. Tag $\bar{x} = A^{-1}\bar{y}$. $A\bar{x} = A(A^{-1}\bar{y}) = AA^{-1}\bar{y} = E\bar{y} = \bar{y}$. dvs varje $\bar{y}$ i $\mathbb{R}^n$ är bild av ett $\bar{x}$ i $\mathbb{R}^n$

2 $\Rightarrow$ 1) Antag att $T_A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \Rightarrow$ Linjära ekv. systemet $A\bar{x} = \bar{y}$ har en lösning för varje högerled $\bar{y} \Rightarrow A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \quad A\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ och $AX = E$ har en lösnin

$\Rightarrow A$ är inverterbar

1 $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow A\bar{x} = \bar{y}$ har exakt en lösning för varje $\bar{y} \Rightarrow T_A$ är 1-1