1.10c) Bestäm trappstegsformen till

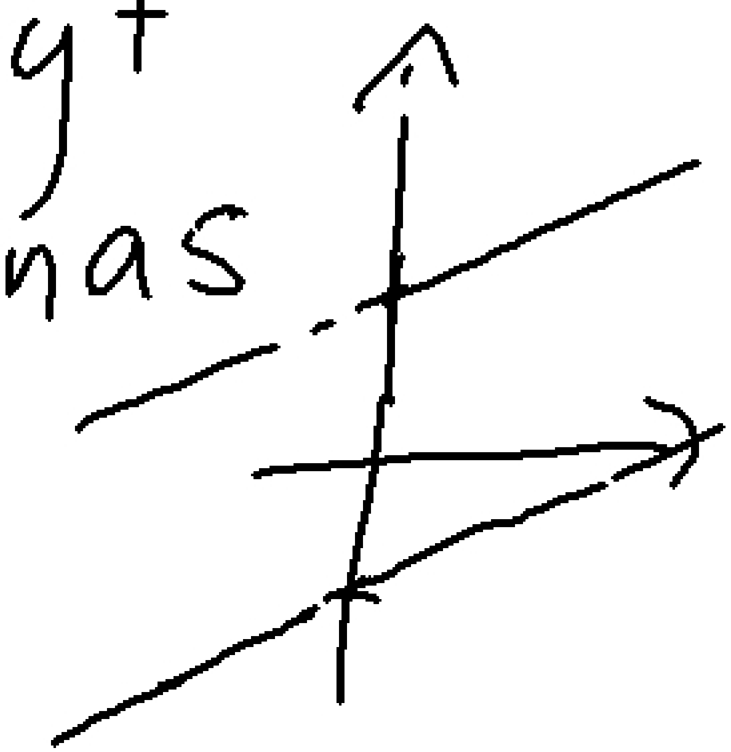
$$\begin{cases} 2x-4y=8 \\ -3x+6y=12 \end{cases}$$ och lös systemet.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 8 \\ -3 & 6 & 12 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 6 & 12 \end{array}\right) \overset{3}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 24 \end{array}\right)$$

$0=24$ orimligt

Lösning saknas



Gauss-elimination

Steg 1 Bestäm första kolonn $\neq 0$ från vänster.

Steg 2 Byt ev. rader för att få ett element $\neq 0$ högst uppi kolonnen i Steg 1.

Steg 3 Om elementet är a multiplicera rad 1 med $\frac{1}{a}$. (eller skapa en ledande 1:a på annat sätt)

Steg 4 Addera multipler av rad 1 för att få 0:or under ledande 1:an.

Steg 5 Täck rad 1 och upprepa steg 1-4 på resten.

Steg 6 Börja med sista raden och arbeta uppåt. Skapa 0:or över ledande ettor.

1.11a Bestäm trappstegsform och lös

$$\begin{cases} 2u + 5v + 7w = 4 \\ 7u \quad\quad - 2w = 4 \\ u + v + w \quad = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

steg 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} -7 & -2 \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) -1 \Leftrightarrow$$

Steg 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) -2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -12 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) -3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & 40 \end{array}\right) \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad -1 \quad 1 \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad -1 \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$u = 2$

$v = -7$

$w = 5$

Prövn.

$2 \cdot 2 + 5 \cdot (-7) + 7 \cdot 5 = 4$

$7 \cdot 2 \qquad - 2(5) = 4$

$2 - 7 + 5 = 0$ ok!

1.13c)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \quad -1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) -1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 4 & -5 \end{array}\right) 4 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) -3$$

led. 1:or

$0 = -1$

Lösning saknas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ trappstegsform

$\boxed{1.14c}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \quad -3 \quad -5 \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{4} \quad 1 \quad -1$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad -1 \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right)$$

t

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{4}x_3 = 1 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1 \end{cases} \qquad x_3 = t$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{3}{4}t \\ x_2 = 1 - \frac{1}{4}t \\ x_3 = t \qquad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Varje kolonn $\neq 0$ utan ledande 1:a motsvarar en parameter. $\Rightarrow$ ∞ många el ingen

Ledande 1:or i varje kolonn ger exakt en lösning.

En rad med 0:or i VL och HL $\neq 0$ $\Rightarrow$ lösning saknas

1.8a Bestäm antal lösn.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ledande 1:or i varje kolonn ⇒ exakt 1

1.8b

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

rad 3 - rad 2 ger 0 = 0 i rad 3

Ingen led 1:a i kolonn 3 ⇒ parameter ⇒ ∞

t

<u>Homogena ekv. system</u> om alla HL = 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

har alltid lösningen $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

kallas den <u>triviala</u> lösningen.

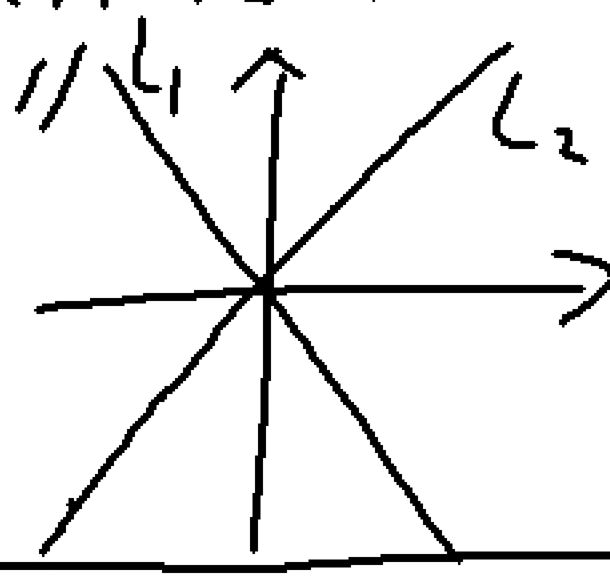
Andra lösn. kallas <u>icke-triviala</u>.

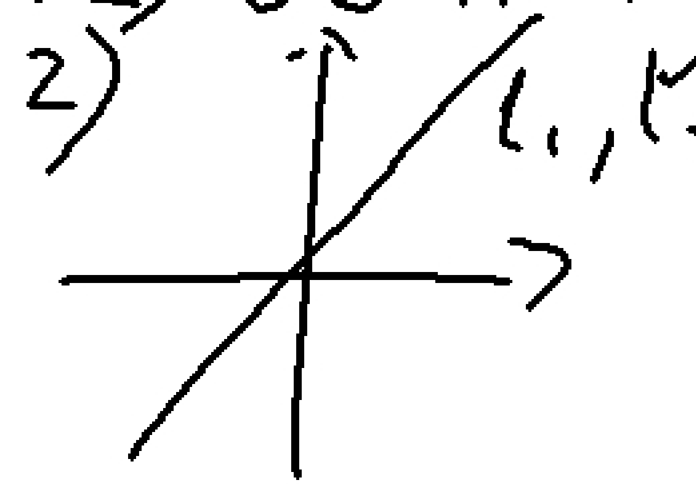
Trappstegs-formen har

1) Led. 1:or i alla kolonner $\Rightarrow$ bara triviala

2) kolonn $\neq 0$ utan led. 1:a $\Rightarrow$ ∞ många

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0 & l_1 \\ a_2x+b_2y=0 & l_2 \end{cases}$$





---

1) Liggande system — Fler obek. än ekv.

2) Stående system — Färre obek. än ekv.

3) Kvadratiskt system — Lika många obek och ekv

Sats Ett liggande hom. system har alltid ∞ många lösningar.

Ett system har allmänt HL om det består av sinsemellan oberoende variabler.

Ex $\begin{cases} x+y=k \\ x-y=l \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & l \end{array}\right) \overset{-1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ 0 & -2 & l-k \end{array}\right) -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & \frac{k-l}{2} \end{array}\right) \overset{-1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{k+l}{2} \\ 0 & 1 & \frac{k-l}{2} \end{array}\right)$ $\begin{cases} x=\frac{k+l}{2} \\ y=\frac{k-l}{2} \end{cases}$

exakt en lösning

Simultana system

är flera linjära ekv. system med lika VL. De kan lösas samtidigt.

1.19

$$\begin{cases} x+5y=1 \\ 2x+3y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+5y=6 \\ 2x+3y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+5y=-7 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 5 & 1 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \cdot (-2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 5 & 1 & 6 & -7 \\ 0 & -7 & 0 & -9 & 21 \end{array}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 5 & 1 & 6 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{7} & -3 \end{array}\right) \cdot (-5) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & 8 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{7} & -3 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{3}{7} \\ y=\frac{9}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} x=8 \\ y=-3 \end{cases}$ Prövn.

Ex För vilka värden på a har följande system ingen lösning, exakt en lösning resp. oändligt många lösningar.

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y+(a^2-14)z=a+2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right) \overset{-3,\ -4}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right)$$

rad3-rad2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{7}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right)$$

$$a^2-16=0 \Longleftrightarrow a^2=16 \Longleftrightarrow a=\pm 4$$

Fall 1) $a=4$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ oändligt många lösn.

Fall 2) $a=-4$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$ $0=-8$ Ingen lösn.

Fall 3) $a \neq \pm 4 \Rightarrow a^2-16 \neq 0$

rad3 $\cdot \dfrac{1}{a^2-16}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-4}{a^2-16} \end{array}\right)$ $\frac{a-4}{a^2-16} \to \frac{1}{a+4}$

Exakt en lösning