En övertriangulär matris har 0:or under diagonalen. (kvadratisk)

Ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En undertriangulär matris har 0:or över diagonalen (kvadr.)

Ex $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

En kvadr. matris är symmetrisk om

$A = A^T$, dvs $a_{ij} = a_{ji}$. Varje element speglas i diagonalen på ett likadant element.

Ex $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

En kvadr. matris är antisymmetrisk om $A = -A^T$ dvs $a_{ij} = -a_{ji}$. Varje element är -spegelbilden. $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$

$-0 = 0$

Ex $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\overset{S.}{A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}} \quad \overset{a.S}{B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \quad \overset{S.}{C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.8) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ Beräkna

$$(A^3+A^2+A+E)(A-E) = A^4 - A^3E + A^3 - A^2E$$

$$+ A^2 - AE + EA - E^2 = A^4 - A^3 + A^3 - A^2 + A^2$$

$$- A + A - E = A^4 - E$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot 3 & 1\cdot(-2) - 2\cdot(-4) \\ 3\cdot 1 - 4\cdot 3 & 3(-2) - 4\cdot(-4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -5(-5)+6(-9) & (-5)6+6\cdot 10 \\ -9\cdot(-5)+10(-9) & -9\cdot 6+10\cdot 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -29 & 30 \\ -45 & 46 \end{pmatrix} \qquad A^4 - E = \begin{pmatrix} -29 & 30 \\ -45 & 46 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -30 & 30 \\ -45 & 45 \end{pmatrix}$$

$\boxed{59}$ $(A-B)(A+B)-(A+B)(A-B)=$

$= A^2 + AB - BA - B^2 - (A^2 - AB + BA - B^2) = A^2 + AB - BA - B^2 - A^2 + AB - BA + B^2 = 2AB - 2BA = 2(AB - BA)$

$AB \neq BA$ i regel matrismultiplikation är inte kommutativ.

Ex. $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ekv. systemet kan skrivas $A\bar{x} = \bar{b}$ på matrisform.

<u>Ex</u> Lös matrisekvationen $AX = B$

där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\underset{2\times 2}{A}\ \underset{r\times s}{X} = \underset{2\times 2}{B}$$

$r = 2 \quad 2\times s = 2\times 2 \Rightarrow s = 2$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a + 2c = -1 \\ 3a + 4c = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} b + 2d = -2 \\ 3b + 4d = 8 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \end{array}\right) -3 \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & 14 \end{array}\right) -\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right) -2 \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a=7 \\ c=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} b=12 \\ d=-7 \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Kontroll: $AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-8 & 12-14 \\ 21-16 & 36-28 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = B$ ok.

$(A|B)$ löses med Gauss-elim.

$$\Updownarrow$$

$$AX = B$$

Ex Lös matrisekv. $XA=B$.

Transponera ekv.

$$(XA)^T = B^T \Rightarrow \underline{A^T X^T = B^T}$$

$$\left(A^T \middle| B^T\right) \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{array}\right) \cdots\cdots \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = B \text{ ok.}$$

Invers till en matris

__Def__ En kvadratisk matris A är __inverterbar__ om det finns en matris B så att $AB = E$ och $BA = E$.

__Ex__ ⇒ $\underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sats Inversen till A är unik och skrivs A^{-1}.

Bevis Antag att B och C är inverser till A. $\Rightarrow AB = E$ Multiplicera med C

$\underbrace{CA}_{E}B = CE$ eftersom C är invers till A.

$EB = C \Rightarrow B = C$.

Sats Om A och B är inverterbara så är AB inverterbar och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bevis $A\underbrace{BB^{-1}}_{E}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$

$B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{E}B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$ klart.

En elementärmatris P fås när en tillåten radoperation utförs på E.

$\underline{op^1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} k \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = P$

$\underline{op^2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$

$\underline{op3}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} k \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$

rad 2 + k · rad 3 $\Rightarrow (P)_{23} = k$

rad i + k · rad j $\Rightarrow (P)_{ij} = k$

Sats P och PA är de matriser som erhålls då samma operation utförs på E resp A.

En följd av operationer som motsvarar $P_1, P_2, \ldots P_k$ utförs på A vid Gauss-elim. och ger trappstegsmatris T, dvs $P_k \cdots P_2 P_1 A = T$. Om samma följd av operationer utförs på E fås

$$P_k \cdots P_2 P_1 E = P_k \cdots P_2 P_1 = U$$

$$UA = P_k \cdots P_2 P_1 A = T \quad \text{dvs } UA = T$$

5.13c) Bestäm U så att UA är på trappstegsform då $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Samma operationer utförs på A och E tills VL får trappstegsform.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-1}{\Leftrightarrow}$$

$P_1A \qquad P_1E$

$P_2P_1A \qquad P_2P_1E$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontroll: $UA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

ok

5.13d

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; -3 \;\; -1 \iff$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \; -1 \;\; -1 \iff \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \; -2 \iff$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{T} \qquad \underbrace{\begin{matrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix}}_{U}$$

$$UA = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ fungerar också

Metod att bestämma A^{-1} om den finns.

Gausseliminering av $(A|E)$ ger $(T|U)$

där $UA=T$.

1) $T=E \Rightarrow A$ är inverterbar och $A^{-1}=U$

2) $T\neq E \Rightarrow A$ är inte inverterbar.

Bestäm inversen till $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ om den finns.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) -2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) -1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) -4$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$E \qquad A^{-1}$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

ok

Inversen till en 2×2-matris

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$ om $ad-bc \neq 0$ annars finns den inte.

Räkneregler se sid 154, 169.

$(A+B)^T = A^T + B^T$ $\qquad (A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

$(AB)^T = B^T A^T$ $\qquad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$A^{TT} = A$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(kA)^T = kA^T$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$AB \neq BA$$ iregel

$$(AB)^2 = ABAB$$

$$(A^k)^T = (A^T)^k \quad A^0 = E \quad (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

5.16e Bestäm inversen till $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ om den existerar.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -1 \quad -2 \quad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad -1 \quad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

0-rad $\Rightarrow T \neq E$ A^{-1} existerar inte.

5.17) För vilka värden på λ är

$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -4-\lambda \end{pmatrix}$ inverterbar?

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -4-\lambda \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(2-\lambda)(-4-\lambda)-5(-1)} \begin{pmatrix} -4-\lambda & -5 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

om $(2-\lambda)(-4-\lambda)+5 \neq 0$ Lös ekv.

$$2(-4) - 2\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 5 = 0 \iff$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \iff$$

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1+3} \iff \lambda = -1 \pm 2$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$ Inverterbar om

$\lambda \neq 1$ och $\lambda \neq -3$