Inversen till elementärmatriser

Op	P	Inversop.	P_1	PP_1	P_1P
$k \cdot$ rad i	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$	$\frac{1}{k} \cdot$ rad i	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$	E	E
rad $i \longleftrightarrow$ rad j	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	rad $j \longleftrightarrow$ rad i	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	E	E
rad i + k rad j	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	rad i − k rad j	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	E	E

dvs P och P_1 är inverterbara och $P^{-1} = P_1$

Sats A är en kvadratisk matris

Då är följande påstånden ekvivalenta.

1. A är inverterbar
2. $A\bar{x}=\bar{0}$ har bara lösningen $\bar{x}=\bar{0}$.
3. A:s trappstegsform är E.
4. A är en produkt av elementärmatriser.

Bevis $1 \Rightarrow 2)$ Antagatt A är inverterbar.

Låt $\bar{x}_0$ vara en godtycklig lösning till $A\bar{x}=\bar{0}$, dvs

$A\bar{x}_0=\bar{0}$. Multiplicera med A^{-1}! $A^{-1}A\bar{x}_0=A^{-1}\bar{0}$.

$E\bar{x}_0=\bar{0} \Rightarrow \bar{x}_0=\bar{0}$

$2 \Rightarrow 3)$ Antag att $\bar{x}_0 = \bar{0}$ är enda lösningen till $A\bar{x}_0 = \bar{0}$. $\Rightarrow$ Trappstegsformen har ingen 0-rad $\Rightarrow T = E$.

$3 \Rightarrow 4)$ $T = P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = E$ enligt 3)

$$\underbrace{(P_k P_{k-1} \cdots P_1)^{-1} P_k P_{k-1} \cdots P_1}_{E} A = (P_k \cdots P_1)^{-1} E$$

$$EA = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}$$

$$A = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}$$

$4 \Rightarrow 1)$ $A = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}$ dvs A är en produkt av inverterbara matriser dvs A inverterbar

Sats 1. A är kvadratisk och $BA=E$
$\Rightarrow$ A är inverterbar och $A^{-1}=B$
2. A är kvadratisk och $AB=E \Rightarrow A^{-1}=B$

Bevis 1. Låt $\bar{x}_0$ vara en godtycklig lösning till $A\bar{x}=\bar{0}$. $\Rightarrow A\bar{x}_0=\bar{0}$
Multiplicera med B. $BA\bar{x}_0=B\bar{0} \Rightarrow$
$E\bar{x}_0=\bar{0} \Rightarrow \bar{x}_0=\bar{0} \Rightarrow$ A inverterbar enligt föreg. sats.

2. $AB=E \Rightarrow B^{-1}=A$ enligt 1
$\Rightarrow$ $BA=E$ och $AB=E$ definition av invers
$\Rightarrow$ A är inverterbar och $A^{-1}=B$

Sats A inverterbar $\iff$
$A\bar{x}=\bar{b}$ har exakt en lösning för
godt. högerled $\bar{b}$.

Bevis $\Rightarrow$) Antag att A är inverterbar
och $\bar{x}_0$ en godt. lösning till $A\bar{x}=\bar{b}$.
$\Rightarrow A\bar{x}_0=\bar{b}$. Multiplicera med A^{-1}

$$A^{-1}A\bar{x}_0=A^{-1}\bar{b} \Rightarrow E\bar{x}_0=A^{-1}\bar{b} \Rightarrow \bar{x}_0=A^{-1}\bar{b}$$

dvs exakt en lösning.

$\Leftarrow$) Antag $A\bar{x}=\bar{b}$ har exakt en lösning
för varje högerled $\bar{b}$. $\Rightarrow A\bar{x}=\bar{0}$ har
exakt en lösning dvs bara $\bar{x}=0$.
$\Rightarrow$ A inverterbar

5.22c) Förenkla $A^{-1}(AA^T)^T$

$$A^{-1}(AA^T)^T = A^{-1}A^{TT}A^T = \underbrace{A^{-1}A}_{E}A^T = EA^T$$

$$= A^T$$

$$\boxed{\begin{aligned}(AB)^T &= B^TA^T \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}\end{aligned}}$$

Kap 6 Determinanten

är en funktion som ordnar ett reellt tal till en kvadratisk matris.

2x2-matriser

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$-$ $+$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ om } \det A \neq 0}$$

<u>Def</u> En <u>permutation</u> av $\{1, 2, \dots, n\}$ är en uppräkning av talen i någon ordning.

<u>Ex</u> Permutationer av $\{1, 2\}$ är 12, 21

——— " ——— $\{1, 2, 3\}$ -"- 123 132
213 231
312 321

En <u>inversion</u> i permutationen är när ett större tal kommer före ett mindre

Udda antal inversioner $\Rightarrow$ udda perm.
jämnt — " — $\Rightarrow$ jämn perm

Ex	Perm	Inv	Antal inv	Udda, jämn
	132	32	1	udda
	231	21, 31	2	jämn
	321	32, 31, 21	3	udda

En <u>elementarprodukt</u> till en $n \times n$-matris är en produkt av n element alla från olika rader och kolonner.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $a_{11}a_{22}$ $\quad a_{1j_1}a_{2j_2}$

$a_{12}a_{21}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $a_{12}a_{21}a_{33}$ $\quad a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$

$a_{12}a_{23}a_{31}$

Elementarprodukt med tecken

Om $j_1 j_2 \cdots j_n$ är en jämn perm $\Rightarrow$ $+a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$

Om —— " ———— udda perm $\Rightarrow$ $-a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$

Def. det A är summan av alla elementarprodukter med tecken.

Ex $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 5 \cdot 7 = 18 - 35 = 17$$

Sarrus regel (3x3-matriser)

$$\det A = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$$a_{11} \cdot a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$
$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

2.65c)

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1$$
$$- 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 0 = -2$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Sats A är en kvadr. matris

1. Om A har en 0-rad är $\det A = 0$
2. $\det A^T = \det A$

Bevis av 1. Varje elementar produkt innehåller ett element från varje rad
$\Rightarrow$ alla elementar prod. $= 0 \Rightarrow \det A = 0$.

Sats Om A är triangulär är $\det A =$
$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

Bevis
$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a_{11} är enda elementet $\neq 0$ från rad 1
a_{22} — " — möjliga ~~elementet~~ $\neq 0$ från rad 2
a_{33} är enda — " — ett från rad 3

Sats A är en $n \times n$-matris och B den matris som fås då en tillåten radop. utförs på A.

op1 $\frac{1}{k} \cdot$ rad i $\Rightarrow \frac{1}{k} \det A = \det B \Leftrightarrow \det A = k \det B$

op2 rad $i \leftrightarrow$ rad j $\Rightarrow -\det A = \det B \Leftrightarrow \det A = -\det B$

op3 rad i + k rad j $\Rightarrow \det A = \det B$

Determinanten kan beräknas genom att utföra radoperationer tills matrisen får triangulär form.

Ex

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \tfrac{1}{3} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} -2 = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \tfrac{1}{5} =$$

$$= -3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} -2 = -15 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= -15 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-11) = \underline{165}$$

2.10d

$$\begin{vmatrix}2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&2&1&0&0\\2&1&0&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}-2\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix}1&2&1&0&0\\0&-3&-2&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix}1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&-3&-2&0&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix} \\ 3\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&4&3&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&4&3&0\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -4\\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix}1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&-5&-4\\0&0&0&1&2\end{vmatrix} =$$

$$= -(-)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = \underline{\underline{6}}$$

Eftersom $\det A^T = \det A$ kan vi göra kolonnoperationer på A.

Ex

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & 13 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 17 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 17 = -17$$