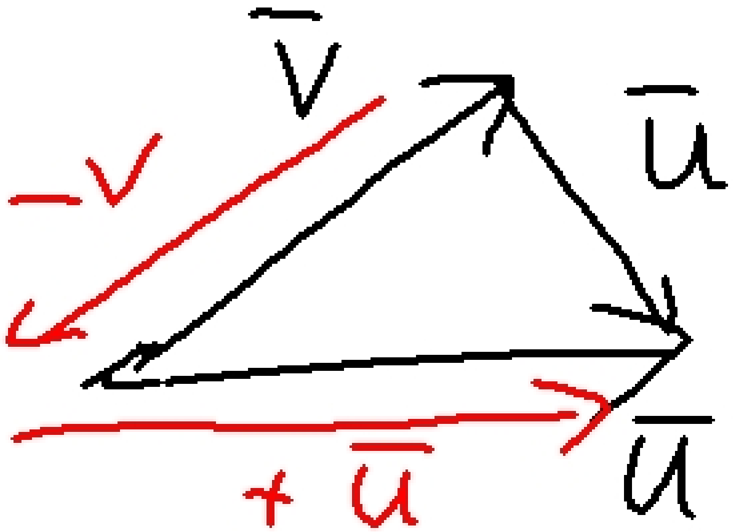
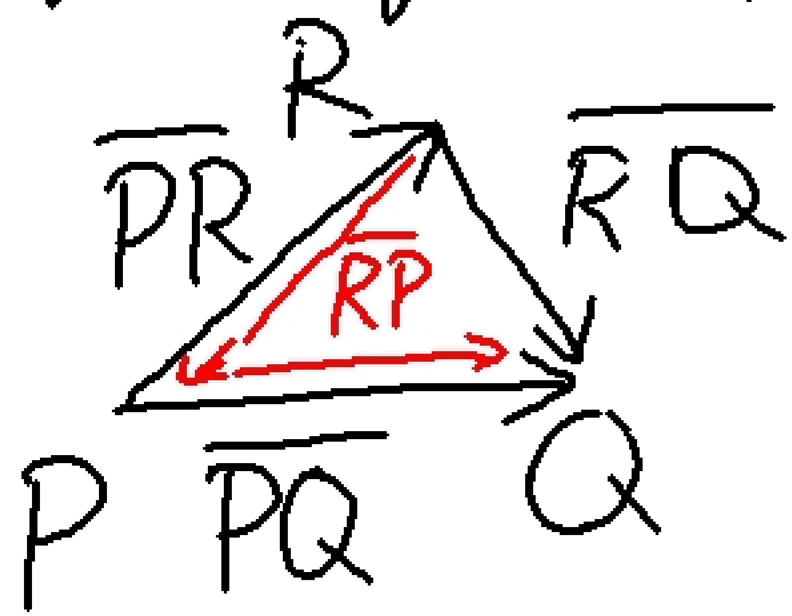
$$\bar{u}-\bar{v}=\bar{u}+(-\bar{v})$$



$$\bar{v}+(\bar{u}-\bar{v})=\bar{u}$$



$$\overline{RQ}=\overline{RP}+\overline{PQ}$$
$$=-\overline{PR}+\overline{PQ}$$

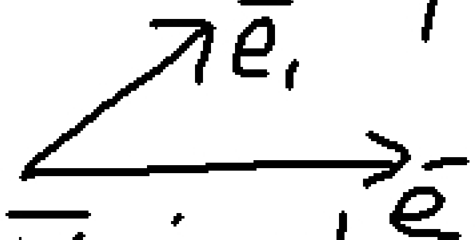
$\bar{u}$ och $\bar{v}$ är parallella, $\bar{u} \parallel \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u}=k\bar{v}$
eller $\bar{v}=l\bar{u}$.

$k\bar{u}$ kallas en <u>skalär multipel</u> av $\bar{u}$.

Låt origo O vara en referenspunkt och en godt. punkt P. Då kallas $\overline{OP}$ <u>ortsvektorn</u> till P.

Koordinatsystem

En *bas* i planet är två icke-parallella vektorer $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$.



Då kan varje vektor $\bar{v}$ i planet skrivas

$\bar{v} = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2$, en *linjärkombination* av $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$. $\bar{v} = (a,b)_{(\bar{e}_1,\bar{e}_2)}$, $\bar{v}$ har koordinaterna (a,b) i basen $(\bar{e}_1,\bar{e}_2)$

Koordinaterna är entydiga, ty

Antag $\bar{v} = (a_1,b_1)$ och $\bar{v} = (a_2,b_2)$

$\bar{v} = a_1\bar{e}_1 + b_1\bar{e}_2 = a_2\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 \Leftrightarrow (a_1-a_2)\bar{e}_1 = (b_2-b_1)\bar{e}_2$

$a_1 \neq a_2 \Rightarrow \bar{e}_1 = \frac{b_2-b_1}{a_1-a_2}\bar{e}_2 \Rightarrow \bar{e}_1 \parallel \bar{e}_2$ orimligt

$b_1 = b_2, a_1 = a_2$

Om origo, O väljs är $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ ett koordinatsystem. $\bar{e}_1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 = (1, 0)$

$\bar{e}_2 = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \bar{e}_2 = (0, 1)$.

Ortogonala vektorer är vinkelräta.

$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ är en ortogonal bas om $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$.

$\dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \hat{v}$ är en enhetsvektor och sägs vara normerad.

$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ är en ON-bas (ortonormal bas) om $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$ och båda är enhetsvektorer.

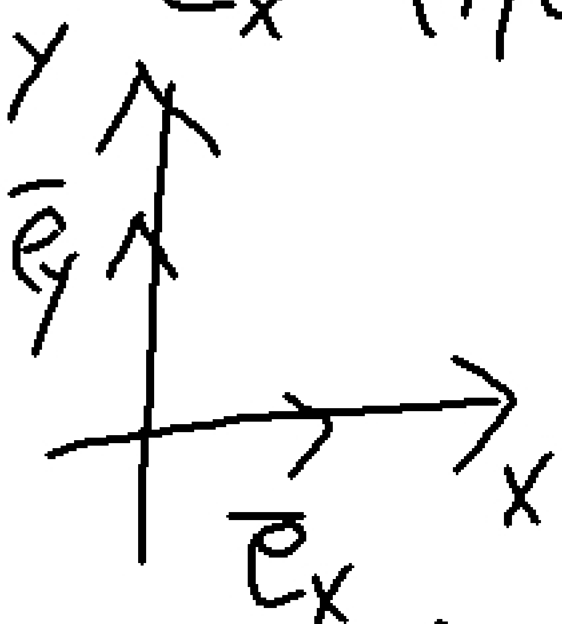
$\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ utgör då ett ON-koordinatsystem, Cartesiskt

Def. Vektorrummet $\mathbb{R}^2$:

Mängden av alla talpar (x,y) med operationerna $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

$$k(x_1,y_1)=(kx_1,ky_1)$$

$\bar{e}_x=(1,0)$, $\bar{e}_y=(0,1)$ är standardbasen för $\mathbb{R}^2$.



Vektorrummet $\mathbb{R}^3$:

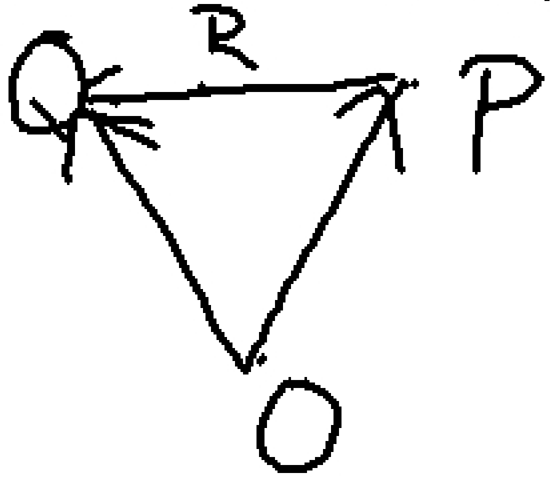
Alla taltrippler (x,y,z) med motsvarande operationer.

Standardbas $\{\bar{e}_x,\bar{e}_y,\bar{e}_z\}$ $\bar{e}_x=(1,0,0)$

$\bar{e}_y=(0,1,0)$, $\bar{e}_z=(0,0,1)$

Vektorrummet $\mathbb{R}$: alla reella tal med + och ·. Standard bas $\bar{e}_x = 1$

Ex $P(1,2)$ och $Q(-2,3)$ är två punkter i $\mathbb{R}^2$. Bestäm $\overline{PQ}$ och $\overline{QP}$. $\overline{OP} = (1,2)$ $\overline{OQ} = (-2,3)$



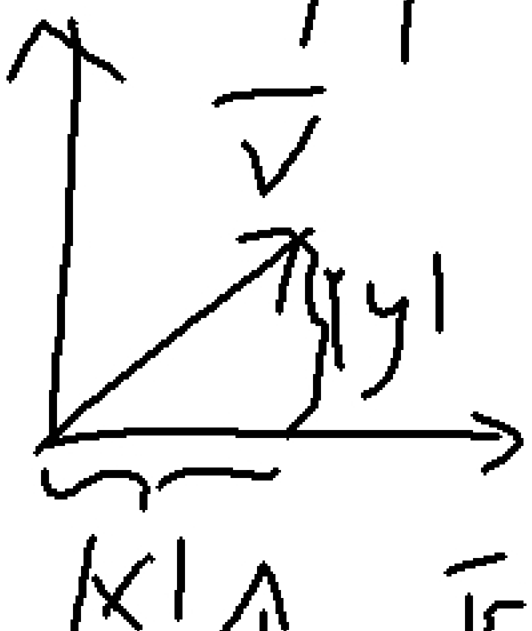
$$\overline{PQ} = \overline{PO} + \overline{OQ} = -\overline{OP} + \overline{OQ} =$$
$$= -(1,2) + (-2,3) = (-1-2, -2+3) =$$
$$= (-3,1) \quad \overline{QP} = -\overline{PQ} = -(-3,1) = (3,-1)$$

Ex Bestäm en punkt R som delar sträckan PQ mitt itu. $Q \xrightarrow{R} P$ $\quad \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{QP}$

$$\overline{QR} = \overline{RP} \Rightarrow 2\overline{QR} = \overline{QP} \Rightarrow \overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{QP} = \frac{1}{2}(3,-1)$$

$$\overline{OR} = \overline{OQ} + \overline{QR} = (-2,3) + \frac{1}{2}(3,-1) = \left(-2+\frac{3}{2},\ 3-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

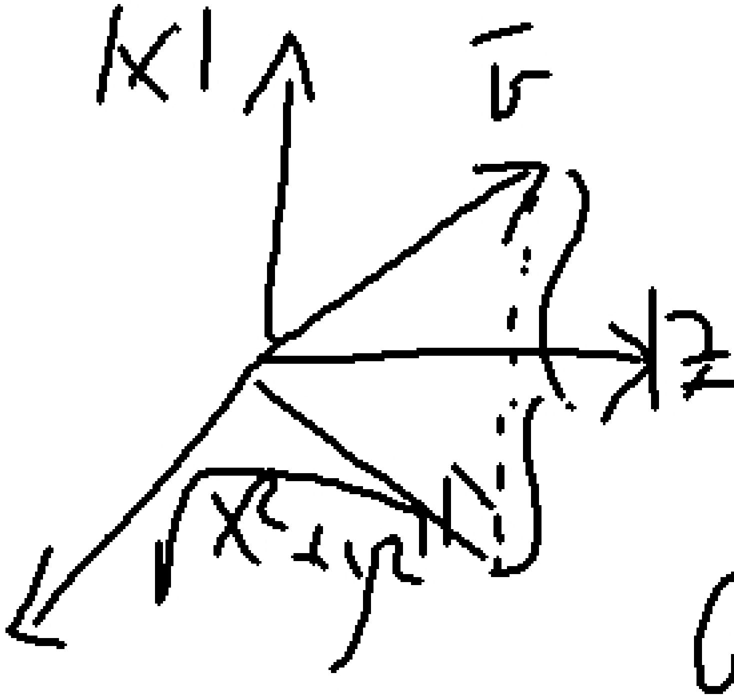
Beloppet eller längden av $\bar{v} = (x, y)$



$$|\bar{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$ Pyth. sats

$\bar{v} = (x, y, z)$ $\quad |\bar{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2 ggr Pyth

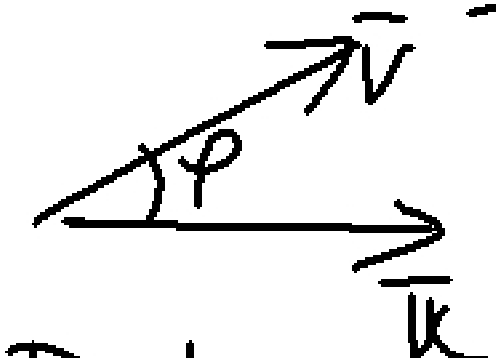


$P(x_1, y_1, z_1)$ $\quad Q(x_2, y_2, z_2)$

$$d = |\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Avståndsformeln

Skalärprodukt



$$0 \le \varphi \le \pi$$

Def $\bar u, \bar v$ är vektorer i planet eller rummet och φ är vinkeln mellan $\bar u$ och $\bar v$, $0 \le \varphi \le \pi$.

$$\bar u \cdot \bar v = \begin{cases} |\bar u||\bar v|\cos\varphi & \text{om } \bar u \neq \bar 0 \text{ och } \bar v \neq \bar 0 \\ 0 & \text{om } \bar u = \bar 0 \text{ eller } \bar v = \bar 0. \end{cases}$$

kallas skalära produkten (inre produkten) av $\bar u$ och $\bar v$.

2.30 Bestäm vinkeln mellan $\bar a$ och $\bar b$ om

$\bar a \cdot \bar b = -3$, $\bar a^2 = 9$, $\bar b^2 = 2$

$$\cos\varphi = \frac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar a||\bar b|} = \frac{-3}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

Egenskaper

$\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$ kommutativ

$$\bar{u} \cdot \bar{v} \begin{cases} > 0 & \text{om } \varphi \text{ är spetsig} \\ < 0 & \text{om } \varphi \text{ är trubbig} \\ = 0 & \text{om } \varphi \text{ är rät} \end{cases}$$

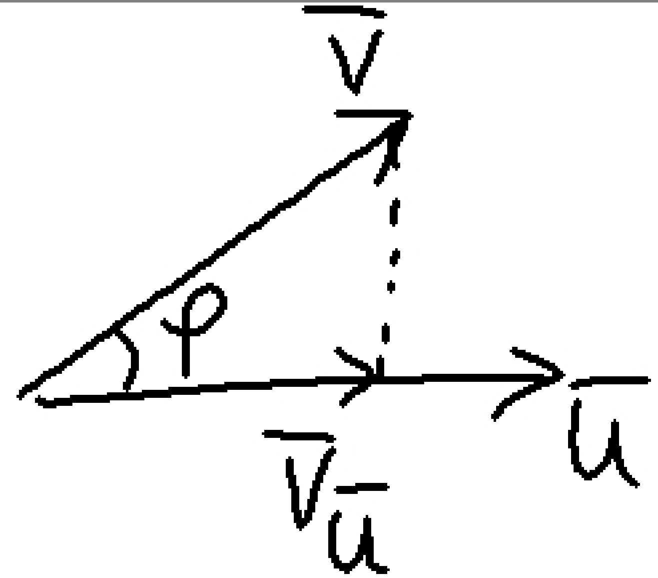
$\bar{u} \cdot \bar{u} = \bar{u}^2 = |\bar{u}|^2 \geq 0$ $= 0$ om $\bar{u} = 0$

$k(\bar{u} \cdot \bar{v}) = (k\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (k\bar{v})$

$\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$ distributiva lagen

Vinkelräta projektionen, $\bar{v}_{\bar{u}}$ av $\bar{v}$ på $\bar{u}$.

$$\bar{v}_{\bar{u}} = (\bar{v} \cdot \bar{u}) \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|^2} \qquad |\bar{v}_{\bar{u}}| = \frac{|\bar{v} \cdot \bar{u}|}{|\bar{u}|}$$



$\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$ är enhetsvektorn i $\bar{u}$:s riktning.

$$|\bar{v}_{\bar{u}}| = |\bar{v}|\,|\cos\varphi| = \frac{|\bar{v}\cdot\bar{u}|}{|\bar{u}|}$$

$$\bar{v}_{\bar{u}} = \begin{cases} |\bar{v}_{\bar{u}}| \cdot \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} \text{ om } \varphi < \frac{\pi}{2} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{|\bar{u}|}\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right) \\ -|\bar{v}_{u}| \cdot \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} \text{ om } \varphi > \frac{\pi}{2} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{|\bar{u}|}\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right) \end{cases}$$

2.34) $\bar{u} \perp \bar{u} + 2\bar{v}$. Bestäm vinkelräta proj. av $\bar{u}+\bar{v}$ på $\bar{u}+2\bar{v}$.

$$\bar{u}+\bar{v}_{\bar{u}+2\bar{v}} = \frac{(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+2\bar{v})}{|\bar{u}+2\bar{v}|^2}\left(\bar{u}+2\bar{v}\right) =$$

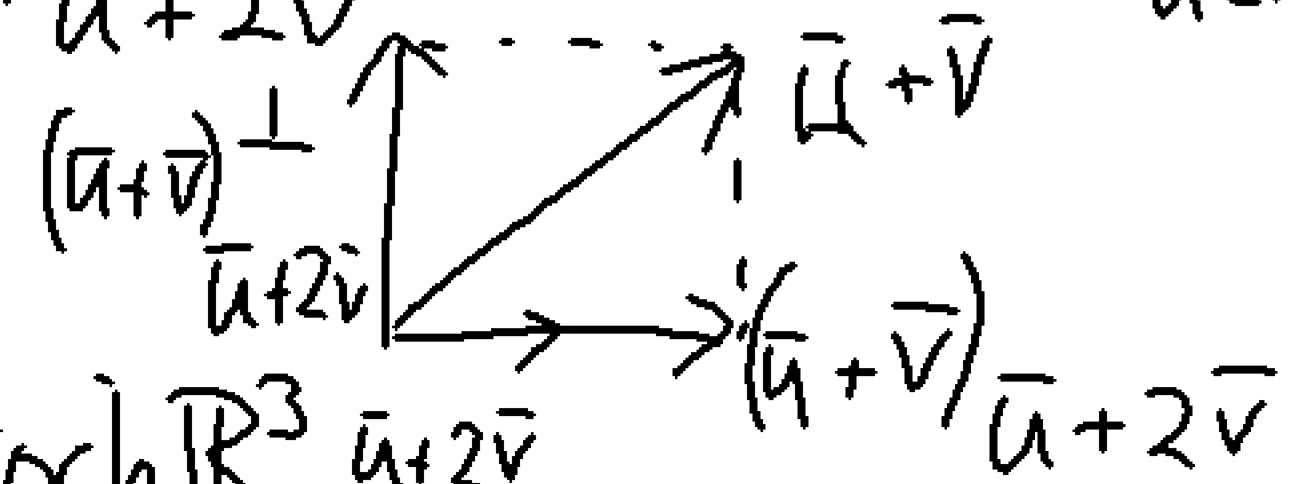
$$\frac{\bar{u}\cdot(\bar{u}+2\bar{v})+\bar{v}\cdot(\bar{u}+2\bar{v})}{(\bar{u}+2v)\cdot(\bar{u}+2\bar{v})}(\bar{u}+2\bar{v})=$$

$$\frac{0+\bar{v}\cdot(\bar{u}+2\bar{v})}{2\bar{v}\cdot(\bar{u}+2\bar{v})}(\bar{u}+2\bar{v})=\frac{1}{2}(\bar{u}+2\bar{v})$$

$$=\frac{\bar{u}}{2}+\bar{v}$$

$$(\bar{u}+\bar{v})^{\perp}_{\bar{u}+2\bar{v}}=\bar{u}+\bar{v}-(\bar{u}+\bar{v})_{\bar{u}+2\bar{v}}=$$

$$\bar{u}+\bar{v}-\frac{\bar{u}}{2}-\bar{v}=\frac{\bar{u}}{2}$$



Skalärprodukten i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$$

$$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Härledning se boken

Def i $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ $|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u}\cdot\bar{u}}$, $\cos\varphi = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$

$$\bar{v}_{\bar{u}} = (\bar{u}\cdot\bar{v})\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|^2}$$

2.42e) (a, b, c), $(bc, -2ac, ab)$

$$(a,b,c)\cdot(bc,-2ac,ab) =$$

$$abc + b(-2ac) + c\,ab = 2abc - 2abc = 0$$

vinkeln är rät

Kryssprodukt

<u>Def</u> $\bar{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{v}=(x_2,y_2,z_2)$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$. Kryssprodukten

$$\bar{u}\times\bar{v}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Determinanten utvecklas längs rad 1.

$\bar{u}\times\bar{v}$ är vinkelrät mot $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

$$|\bar{u}\times\bar{v}|=|\bar{u}||\bar{v}|\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi$$

$\bar{u},\bar{v},\bar{u}\times\bar{v}$ är <u>positivt orienterade</u> som x-, y- och z-axeln eller högerhandsystem

Arean av parallellogrammen som spänns upp av $\bar{u}$ och $\bar{v}$

$$A = |\bar{u}|\cdot h = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\varphi = |\bar{u}\times\bar{v}|$$

2.638

$\bar{u} = (3,0,2)$ $\bar{V} = (-3,0,5)$

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \bar{e}_x \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \bar{e}_y \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + \bar{e}_z \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{e}_y(15+6) =$$

$$= -21\bar{e}_y = (0,-21,0)$$