Repetition, Matematik 2, funktioner av flera variabler.

1. Beräkna hastigheten, farten och accelerationen vid tiden t för en partikel vars rörelse beskrivs av $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t + \cos t,\ 2\cos t - \sin t,\ 2t)$.

2. Beräkna längden av kurvan $\boldsymbol{r}(t) = (4t, 3\sin t, 3\cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

3. Sök
   a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-1}{y-1}$.   b. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{3x^2+4y^2}$.   c. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2xy}{3x^2+4y^2}$.

4. Bestäm alla funktioner $f(x,y)$ sådana att
   a. $f'_x = 2x\sin x^2$, $f'_y = \cos y$.
   b. $f'_x = y$, $f'_y = x + 2y$.

I uppg. 5–6 är f och g godtyckliga två gånger deriverbara funktioner av en variabel.

5. Visa att
   a. $z = f(x+y) + g(x-y)$ satisfierar ekvationen $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$.
   b. $z = f(x^2 + xy^2)$ satisfierar ekvationen $2xyz'_x - (2x + y^2)z'_y = 0$.

6. Låt $z = xy + f\left(\frac{x}{y}\right)$. Bestäm $x^2z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{yy}$.

7. Bestäm riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z) = e^{xy} + 2\arcsin z$ i punkten $(0,1,0)$ i riktning av vektorn $(-1,0,1)$. I vilken riktning växer f i $(0,1,0)$ snabbast? Vilka värden antar riktningsderivatan i $(0,1,0)$ då $\boldsymbol{u}$ är en godtycklig enhetsvektor?

8. Låt $f(x,y) = \sqrt{1 + 2x + 4y}$. Ange den riktning i vilken tillväxthastigheten av f i punkten $(4,-2)$ är minst.

9. Låt $z(x,y) = f(2x + 3y)$. Beräkna riktningsderivatan av z i punkten $(1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (3,4)$ då $f'(5) = 4$. Vilka värden kan riktningsderivatan $z'_u(1,1)$ anta få $\boldsymbol{u}$ är en godtycklig enhetsvektor?

10. Funktionen $f(u,v)$ är differentierbar i hela $\mathbf{R}^2$. Sätt $h(x,y,z) = f(x/y,\ y/z)$, $y > 0$, $z > 0$. Beräkna $xh'_x + yh'_y + zh'_z$ uttryckt i u och v och partiella derivator av f.

11a. Transformera ekvationen $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ genom $u = \ln(x^2 + y^2)$, $v = \ln(x^2 - y^2)$.

11b. Transformera uttrycket $z''_{xx} - 2xz''_{xy} + x^2z''_{yy}$ genom $x = u$, $y = v - \frac{u^2}{2}$.

11c. Transformera ekvationen $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$ genom $x = u + v$, $y = 2u - v$.

Svar:

1. $(2\cos t - \sin t,\ -2\sin t - \cos t,\ 2)$, 3, $(-2\sin t - \cos t,\ -2\cos t + \sin t,\ 0)$.
2. 5π.

3a. finns ej.   3b. 0.   3c. finns ej.

4a. $f(x,y) = \sin y - \cos x^2 + C$.   4b. $f(x,y) = xy^2 + y$.   6. $2xy$.

7. $1/\sqrt{2}$, $(1,0,2)$, $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.   8. $[-1,-2]$.   9. $72/5$, $[-208,208]$.

10. 0.   11a. $f'_v = 0$.   11b. $z''_{uu} + z'_v$.

11c. $2z''_{uu} + 2z''_{uv} + 5z''_{vv} = 0$.

13. Visa att ekvationen $x^y + \sin y = 1$ definierar y som funktion av x i en omgivning av punkten $(1,0)$ och beräkna $y'(1)$.

14. Visa att det i en omgivning av origo finns en funktion $z(x,y)$ som satisfierar ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x^2z - yz - z = 0$. Beräkna för denna funktion z'_x och z'_y.

15. Bestäm alla punkter på ytan $z = x^2 + 4y^2$ i vilka tangentplanet är parallellt med planet $x + y + z = 0$.

16. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till kurvan $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t, \cos t, \cos 2t + \sin 2t)$, $0 \le t < 2\pi$ i punkten $(0,-1,1)$.

17. Bestäm ekvationen för tangentlinjen och normalen till nivåkurvan $f(x,y) = 6$ i punkten $(2,1)$ då $f(x,y) = x^2y + xy^3$.

18. Bestäm ekvationen till tangentplanet och normalen till ytan
   a. $x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 2$ i punkten $(1,-1,2)$.
   b. $z - 4\arctan\dfrac{y-2x}{x+z} = 3$ i punkten $(1,2,3)$.

19. Bestäm ekvationen till tangentplanet och normalen till ytan
   a. $z = x^2 - 4y^2$ i punkten $(5,2,9)$.
   b. $z = x + y + 3\arctan\dfrac{y-2x}{x+y}$ i punkten $(1,2,3)$.

20. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till funktionen
   a. $f(x,y) = e^{x-2y}$ i punkten $(0,0)$.
   b. $f(x,y) = \ln(2x^2 + y^2) - 2y$ i punkten $(0,1)$.

21. Betrakta funktionen $f(x,y) = \sin(3x - 2y - 5)\cos(2x - 3y)$.
   a. Bestäm en linjär approximation till f i en omgivning till punkten $(3,2)$ och beräkna ett approximativ värde av $f(3.1, 2.2)$.
   b. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till f i en omgivning till punkten $(3,2)$ och använd detta polynom för att beräkna ett approximativ värde av $f(3.1, 2.2)$.

22. Betrakta funktionen $f(x,y) = \sin(2x - y) + 2\ln(y - x)$.
   a. Bestäm en linjär approximation till f i en omgivning till punkten $(1,2)$ och beräkna ett approximativ värde av $f(1.1, 2.2)$.
   b. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till f i en omgivning till punkten $(1,2)$ och använd detta polynom för att beräkna ett approximativ värde av $f(1.1, 2.2)$.

23. Bestäm lokala extrempunkter och deras karaktär till funktionen
   a. $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$.
   b. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y$.

Svar:

13. 0.

14. $z'_x = \dfrac{-3x^2 - 2xz}{3z^2 + x^2 - y - 1}$, $z'_y = \dfrac{-3y^2 + z}{3z^2 + x^2 - y - 1}$.

15. $(-1/2, -1/8, 5/16)$.

16. $(x,y,z) = (-t, -1, 1 + 2t)$.

17. $x + 2y = 4$, $2x - y = 3$.

18a. Tangentplan: $x + y + 3z = 6$. Normal: $(1,-1,2) + t(1,1,3)$.

18b. Tangentplan: $2x - y + z = 3$. Normal: $(1,2,3) + t(2,-1,1)$.

19a. Tangentplan: $10x - 16y - z = 9$. Normal: $(5,2,9) + t(10,-16,-1)$.

19b. Tangentplan: $x - 2y + z = 0$. Normal: $(1,2,3) + t(1,-2,1)$.

20a. $1 + x - 2y + x^2/2 - 2xy + 2y^2$. 20b. $-2 + 2x^2 - (y-1)^2$.

21a. $p(x,y) = -14 + 9x - 2y$. 9.5. 21b. $p(x,y) = -14 + 9x - 2y + (x-3)^2$. 9.51.

22a. $p(x,y) = y - 2$. 0.2. 22b. $p(x,y) = y - 2 - (x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) - (y-2)^2$. 0.19.

23a. l. max. i $\pm(1,1)$, l. min. i $\pm(1,-1)$. 23b. lok. max. i $(-4,2)$.

24. Bestäm lokala extrempunkter och deras karaktär till funktionen

a. $f(x,y) = 3x^2 + 3xy + y^2 + y^3$.
b. $f(x,y) = x^3y^2 + 27xy + 27y$.
c. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$.
d. $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z$.

25. Bestäm det största och minsta värdet av

a. $x^2 - xy + y^2 - x - y + 1$ då (x,y) varierar inom och på randen av triangeln med hörn i punkterna $(0,-1)$, $(0,1)$, $(2,0)$.
b. $x^3 + y^3 - 3y$ då $|x| \le 2,\ 0 \le y \le 2$.
c. $2x^2 + 4x - y + 5$ då $x^2 \le y \le 2 - x$.
d. $x + 7y$ då $x^2 + y^2 \le 2,\ y \le 1$.
e. $x - y$ då $x^2 + y^2 \le 10$.
f. $x + 2y$ då $x^2 + 4y^2 \le 10$.
g. $x + \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.
h. $x + 2y + \sqrt{6 - x^2 - y^2}$.

26. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet

a. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$.
b. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \\ 2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

Beräkna också medelfelet.

27. Bestäm ekvationen för den parabel $y = ax^2 + bx + c$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna $(-3,3)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(3,4)$.

28. Visa att ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x + y + z = 6$ definierar i en omgivning av punkten $(1,1,1)$ precis en funktion $z = z(x,y)$. Beräkna $z''_{xy}(1,1)$.

29. Visa att ekvationen $x + y + \sin xy = 0$ definierar i en omgivning av punkten $(0,0)$ precis en strängt avtagande funktion $y = y(x)$.

30. Visa att ekvationssystemet $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \\ z = 3u - v \end{cases}$ där $u^2 + v^2 \ne 0$, definierar lokalt precis en kontinuerligt deriverbar funktion $z = z(x,y)$. Beräkna $z'_x(0,1)$ och $z'_y(0,1)$ då man vet att $z(0,1) = 2$.

31. Visa att det finns en omgivning av punkten $(x,y,u,v) = (1,1,1,1)$ i vilken ekvationssystemet $\begin{cases} 2x^2 + uy + v^2 = 4 \\ u^2 - 2uv + y^2 = 0 \end{cases}$ definierar precis en kontinuerligt deriverbar funktion

a. $u = u(x,y)$. Beräkna $u'_x(1,1)$.
b. $x = x(u,v)$. Beräkna $x'_u(1,1)$.

32. Bestäm första och andra differentialen till funktionen

a. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3y$ i punkten $(2,1)$.
b. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - xyz - 3y$ i punkten $(2,1,0)$.

Svar:

23a. l. max. i $\pm(1,1)$, l. min. i $\pm(1,-1)$.
23b. lok. max. i $(-4,2)$.
24a. l.min. i $(0,0)$
24b. l.max i $(-3,-1)$
24c. lok. min i $(0,0,0)$
24d. saknas
25a. 3 och 3/28.
25b. 10 och -10.
25c. 10 och $-1/8$.
25d. 10 och 6.
25e. $2\sqrt{5}$ och $-2\sqrt{5}$.
25f. $3\sqrt{2}$ och $-3\sqrt{2}$.
25g. 2 och $-\sqrt{2}$.
25h. 6 och $-\sqrt{30}$.
26. a. $x = 2/3$, $y = -1/3$; 1.
b. $x = 7/11$, $y = -4/11$; $\sqrt{1122}/33$.
27. $y = (26x^2 + 20x + 115)/100$.
28. $-3/2$.
30. $z'_x = z'_y = 1$.
31a. $-2/3$.
31b. 0.
32a. $\mathrm{d}f = 3h - 3k$, $\mathrm{d}^2f = 2h^2 - 2hk + 2k^2$.
32b. $\mathrm{d}f = 4h - k - 2l$, $\mathrm{d}^2f = 2h^2 + 2k^2 - 2hl - 4kl$.