Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004-01-16, kl. 8.00-13.00.
5B1116 Matematik 2 för Media, första delen av kursen, 3p.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.
Inga hjälpmedel.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 4x + 5y + 7z = 0 \end{cases}.$$

(3p)

2. Transformera ekvationen $4xy + 6x + 8y = 10$ till huvudaxelform. Vilken typ av kurva motsvarar ekvationen geometriskt? Bestäm huvudaxlarnas riktningar och skissera kuran i xy-planet. (3p)

3. Beräkna determinanten av $n \times n$-matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(3p)

4. Avgör om vektorerna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bildar en bas för $\mathbb{R}^4$. (3p)

5. Bestäm en linje (på parameter form) som ligger i planet $x + 2y - 3z = 0$ men som inte skär planet $3x + 2y + z = 1$. (3p)

V.g. vänd!

6. Bestäm egenvärden och ortonormaliserade egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(4p)

7. En linjär avbildning har i basen $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

och i basen $\{\vec{u_1} := 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2},\ \vec{u_2} := 4\vec{e_1} + 5\vec{e_2}\}$ matrisen A_u. Bestäm A_u! (4p)

8. Transformera andragradsekvationen

$$2x^2 + 2xz + 5y^2 + 2z^2 + 6x + 10y + 6z = 0$$

till huvudaxelform. Vad motsvarar ekvationen geometriskt? (4p)

9. Hitta två parallella vektorer $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$ och $A\vec{x} = B\vec{y}$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4p)

10. Bestäm alla 2×2 ON-matriser, dvs alla matriser

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

som uppfyller

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AA^T$$

(A^T betecknar A's transponat, $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}$). Visa att produkten av två ON-matriser är en ON-matris. (4p)