Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004-03-01, kl. 8.00-13.00.
5B1116 Matematik 2 för Media, andra delen av kursen, 3p.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs preliminärt minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.
Inga hjälpmedel.

1. Bestäm alla extremvärden till funktionen
$$f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}$$
i $\mathbb{R}^2$. (3p)

2. a) Beräkna riktningsderivatan av funktionen $f(x,y,z) = x\ln(1+y-z)$ i origo (dvs. i punkten $(0,0,0)$) i riktning av vektorn
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
   b) Bestäm den maximala riktningsderivatan i origo.
   c) Bestäm någon riktning i vilken riktningsderivatan är 0. (3p)

3. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till funktionen
$$f(x,y,z) = e^{xy}\cos(x+y)\cos z$$
i punkten $(0,0,0)$. (3p)

4. Definiera begreppen 'gränsvärde', 'kontinuitet' och 'partiell derivata' för en funktion av flera variabler. (3p)

5. Visa att funktionen
$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} u(x,y) &= x - \sin y + 2 \\ v(x,y) &= \sin x - 2y + 3 \end{aligned}$$
är lokalt inverterbar. Beräkna i punkten $(u,v) = (2,3)$, svarande mot $(x,y) = (0,0)$, de partiella derivatorna (av f^{-1}) $\frac{\partial x}{\partial u}$ och $\frac{\partial y}{\partial v}$. (3p)

6. Beräkna tangentplanet i punkten $(a,0,0)$ till en ellipsoid med halvaxlarna a, b och c med hjälp av 2 olika metoder. Observera att ellipsoiden kan definieras med hjälp av ekvationen
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

V.g. vänd!

eller som

$$x = \pm a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} = x(y,z)$$

eller som

$$\begin{aligned} x(\theta,\varphi) &= a\sin\theta\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) &= b\sin\theta\sin\varphi \\ z(\theta,\varphi) &= c\cos\theta \end{aligned}$$

då $\theta \in [0,\pi]$ och $\varphi \in [0,2\pi]$. (4p)

7. Beräkna längden av kurvan

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 2t^2 \end{pmatrix}, \quad -1 \le t \le 1.$$

Finns det (äkta?/falska?) singulariteter på kurvan? Rita kurvan! (4p)

8. Bestäm alla extremvärden till funktionen $f(x,y) = (x^2 - 1/4)(y^2 - 1)$ på cirkeln $\Gamma = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1/4\}$. (4p)

9. Låt $f : D_f = \{(r,\varphi) \mid r > 0, -\pi/2 < \varphi < \pi/2\} \to \mathbb{R}^2$ vara definierad genom

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}.$$

Beräkna Jacobimatrisen $\mathbf{J}_f$. Vad är värdemängden till avbildningen f? Beräkna $\mathbf{J}_{f^{-1}}$ direkt (genom att skriva r och φ som funktioner av x och y) och indirekt (som $(\mathbf{J}_f)^{-1}$). (4p)

10. Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{om } \vec{x} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{om } \vec{x} = \vec{0} \end{cases}$$

a) Är funktionen f kontinuerlig i punkten $\vec{x}_0 = \vec{0}$? (Visa antingen att gränsvärdet $\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} = 0$, eller att gränsvärdet inte existerar.)

b) Beräkna de partiella derivatorna

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{och} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y},$$

dels då $\vec{x} \neq \vec{0}$ och dels då $\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Beräkna

$$R(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{0})}{|\vec{x}|} - \frac{1}{|\vec{x}|}((\vec{\nabla} f)(\vec{0})) \cdot \vec{x}.$$

Är funktionen f differentierbar i punkten $\vec{x} = \vec{0}$? (4p)