Institutionen för matematik
KTH

Tentamenskrivning, 2004-12-15, kl. 8.00-13.00.
5B1116 Matematik 2, för Media.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs, preliminärt, minst 16, 22 respektive 30 poäng, inklusive bonuspoäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.
Inga hjälpmedel!

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -2x+7z &= 4 \\ 7x+5y+2z &= 4 \end{cases}$

(3p)

2. Bestäm riktningsderivatan av $f(x,y,z) = e^{xy} + z^2$ i punkten (0,1,1) i riktning av vektorn
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
Ange också den riktning för vilken riktningsderivatan är störst.

(3p)

3. Ett plan går genom punkten (0,1,1) och skär linjen
$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
vinkelrät. Bestäm planets ekvation och skärningspunkten mellan linjen och planet.

(3p)

4. Bestäm alla lokala extremvärden till funktionen
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 + (x-1)(y-2)$.

(3p)

5. Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till
$$f(x,y,z) = e^{xy+yz+zx}(1 + \frac{x^2+y^2+z^2}{2})$$
i origo (dvs i punkten (0,0,0)).
[Är (0,0,0) en lokal minimipunkt?]

(3 [+1]p)

6. Transformera ekvationen $2xy + 4x - 8y = 30$ till huvudaxelform och ange explicit huvudaxlarnas riktningar. Vad motsvarar ekvationen geometriskt?

(4p)

7. Visa att funktionen $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\begin{cases} u(x,y) = \sin(x) + 2y + 4 \\ v(x,y) = 2x - \cos(y) - 1 \end{cases}$ är inverterbar.

   Beräkna i punkten $(u,v) = (4,-2)$, svarande mot $(x,y) = (0,0)$ partialderivatorna (till $f^{-1} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$) $\frac{\partial x}{\partial v}$ och $\frac{\partial y}{\partial u}$.

(4p)

8. Bestäm 3 ortonormaliserade egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Uttryck även A i basen som ges av dessa egenvektorer.

(4p)

9. Bestäm alla lokala extremvärden av $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$ på ellipsen $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0\}$

(4p)

10. Låt A vara en kvadratisk matris sådan att det $A \neq 0$. Visa att $A^T A$ och AA^T har samma egenvärden.

(3p)