1) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3) - 7(-2) = 8 \neq 0$

Cramer: $\Delta_1 = \ldots = 40,\ \Delta_2 = -56,\ \Delta_3 = 16 \Rightarrow \vec{x} = \frac{\vec{\Delta}}{\Delta} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Gauss-Jordan: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \ \cdot(-7) \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ \\ \end{array} \ldots \Uparrow$

2) $\vec{\nabla} f \Big|_{(0,1,1)} = \begin{pmatrix} y e^{xy} \\ x e^{xy} \\ 2z \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,1,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f'_{\vec{v}}(0,1,1) = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} f(\ldots) = \frac{8}{5}$

$f'_{\vec{r}}(0,1,1)$ är störst om $\vec{n} \parallel \vec{\nabla} f(\ldots) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v} \qquad \vec{n} \parallel \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$

$\Rightarrow$ planets ekvation är $x + z = 1$, eftersom $\vec{v} \cdot \vec{x} = x + z \overset{!}{=} \vec{v} \cdot \vec{x}_0 = 1$;

$x(t) + z(t) = (3+t) + (t) = 3 + 2t \overset{!}{=} 1 \Rightarrow t = -1$

$\Rightarrow$ Skärningspunkten är $\vec{r}(-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

4) $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x+y-4 \\ 2y+x-5 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0} \Rightarrow x=1,\ y=2$

$H_0 = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\Big|_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\Big|_{(1,2)}$ $\quad \det H_0 = 3 > 0$, $\operatorname{Sp} H_0 = 4 > 0$

$\Rightarrow \vec{x}_0 = (1,2)$ är en Minimipunkt ; $f(\vec{x}_0) = 0$

(OBS: $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-1)(y-2)$)

5) $e^t = 1 + t + \underbrace{\frac{t^2}{2} + O(t^3)}$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = (1 + xy + yz + zx + \dots)(1 + \frac{\vec{x}^2}{2})$

$= \underbrace{1 + xy + yz + zx + \frac{\vec{x}^2}{2}} + \dots = \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x+y+z)^2} + \dots$

Taylorpolynomet av andra graden (i $\vec{0}$)

[ $|H(\vec{0})| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$f(\vec{x}) = 1 + \frac{1}{2}(x+y+z)^2 + \underbrace{(xy+yz+zx)}_{\text{kan vara positiv eller negativ i närheten av } \vec{0}} \underbrace{\left(\frac{\vec{x}^2}{2} + \frac{xy+yz+zx}{2}\right)}_{\geq 0} + \dots$

$\Rightarrow \vec{0}$ är inte en lokal Minimipunkt ; (eftersom $= \frac{\vec{x}^2}{4} + \frac{(x+y+z)^2}{4}$)

enklare: $f(-\delta, \delta, 0) = e^{-\delta^2} \underbrace{(1+\delta^2)}_{< e^{+\delta^2}} < 1 = f(\vec{0})$ ]

6) $\vec{x}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + 4x - 8y - 30$ ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm 1 \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \vec{x}^T R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R^T \vec{x} + 4x - 8y - 30$$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= x'^2 - y'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}(x' - y') - \frac{8}{\sqrt{2}}(x' + y') - 30$$

$\vec{x}' := R^T \vec{x}$, $\vec{x} = R\vec{x}'$

$\Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' - y' \\ x' + y' \end{pmatrix}$

$$= (x' - \sqrt{2})^2 - (y' + 3\sqrt{2})^2 - 2 + 18 - 30$$

$$= \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 14 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \text{en hyperbel};$$

huvudaxlarnas riktningar är $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(egenvektorer av $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

7) $|J_f| = \begin{vmatrix} \cos x & 2 \\ 2 & \sin y \end{vmatrix} = \cos x \sin y - 4 \neq 0 \quad \forall_{x,y}$

$\Rightarrow$ inverterbar.

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\Bigg|_{(4,-2)} = J_{f^{-1}}\Big|_{(4,-2)} = (J_f)^{-1}\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial v}(4,-2) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}(4,-2) = \frac{1}{2}$$

8) $A = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \vec{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{m}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\vec{m}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (t.ex.)

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Big(T = \underbrace{(\vec{m}_1\, \vec{m}_2\, \vec{m}_3)}_{\text{ON Matris}}\Big)$$

9) Lagrange: $F(x,y,\lambda) := f(\vec{x}) - \lambda\big(\underbrace{2x^2-4x+y^2-4y+4}_{g(\vec{x})}\big)$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2x-2-\lambda(4x-4) \\ 2y-4-\lambda(2y-4) \\ -g(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1)(1-2\lambda) \\ 2(y-2)(1-\lambda) \\ -g(\vec{x}) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

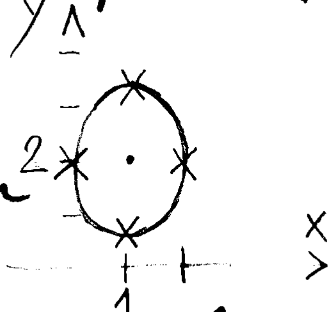
$F_x = 0 \iff x = 1$ eller $\lambda = \frac{1}{2}$ ; $F_y = 0 \iff y = 2$ eller $\lambda = 1$

$x = 1 \underset{g(1,y)\overset{!}{=}0}{\Longrightarrow} y = 2 \pm \sqrt{2}$ (och $\lambda = 1$)

OBS: $g(1,2) \neq 0$

$y = 2 \underset{g(x,2)\overset{!}{=}0}{\Longrightarrow} x = 0$ eller $2$ (och $\lambda = \frac{1}{2}$)

Eftersom $2 = f(1, 2\pm\sqrt{2}) = f(1, 2-\sqrt{2}) > f(0,2) = f(2,2) = 1$,
och $f$ (en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd)
antar minst ett MAX
och minst ett MIN,




$(1, 2\pm\sqrt{2})$ måste vara Maximipunkter och
$(1\pm 1, 2)$ " " Minimipunkter

Parametrisering: $x = \cos\varphi + 1$, $y = 2 + \sqrt{2}\sin\varphi$ $\left((x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{2} = 1\right)$

Enklast: $f(\vec{x}) = (x-1)^2 + (y-2)^2 = \left(\text{Avstånd mellan } \vec{x} \text{ och } \binom{1}{2}\right)^2$

10) $A^T A \vec{x} = \lambda \vec{x} \Rightarrow A(A^T A \vec{x}) = A\lambda\vec{x} = \lambda(\underbrace{A\vec{x}}_{\neq \vec{0}})$

$= (AA^T)A\vec{x}$

(eftersom $\vec{x} \neq 0$, $\det A \neq 0$)