3) $x^2 - 3xy + 5y^2 - \frac{1}{2} = (x,y)\begin{pmatrix}1 & -3/2 \\ -3/2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} - \frac{1}{2}$

$\overset{!}{=} \vec{x}^T R \begin{pmatrix}\lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix} R^T \vec{x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(11x'^2 + y'^2 - 1\right) \overset{!}{=} 0$

$\left(\begin{vmatrix}1-\lambda & -3/2 \\ -3/2 & 5-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) - \frac{9}{4} = \lambda^2 - 6\lambda + \frac{11}{4} \right.$ $\Downarrow$

$\left. \Rightarrow \lambda_\pm = 3 \pm \sqrt{9 - \frac{11}{4}} = 3 \pm \frac{5}{2} \right)$

Ellips med huvudaxlarna $\frac{1}{\sqrt{11}}$ och 1

(normerad)

Egenvektor till $\lambda_+ = 3 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$:

$\begin{pmatrix}1-11/2 & -3/2 \\ -3/2 & 5-11/2\end{pmatrix}\vec{x}_+ = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}9 & 3 \\ 3 & 1\end{pmatrix}\vec{x}_+ \overset{!}{=} \vec{0} \rightarrow \vec{x}_+ = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 \\ -3\end{pmatrix}$

Egenvektor till $\lambda_- = 3 - 5/2 = 1/2$:

$\begin{pmatrix}1-1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 5-1/2\end{pmatrix}\vec{x}_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3 \\ -3 & 9\end{pmatrix}\vec{x}_- \overset{!}{=} \vec{0} \rightarrow \vec{x}_- = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}+3 \\ +1\end{pmatrix}$

(OBS $\det R = \det(\vec{x}_+ \vec{x}_-) = +1$)

Huvudaxlarnas riktningar: $\vec{x}_+$ och $\vec{x}_-$

5) $f(x,y) = e^{-2xy}(1 + 2xy) = e^{-2xy}\left(e^{+2xy} - \frac{(2xy)^2}{2!} - \dots\right)$

$= 1 - 2x^2y^2\left(e^{-2xy} + \dots\right)$

$= 1 + O((\ )^4)$

$\Rightarrow$ Taylorpolynom av tredje graden i origo $= 1$