Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2005-12-16, kl. 8^{00}–13^{00}.

5B1116 Matematik 2, för Medial.

Skriv namn och födelsenummer på varje blad. Endast en uppgift per blad.

För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs preliminärt minst 16, 22 respektive 30 poäng inklusive bonuspoäng.

Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering.

Inga hjälpmedel!

1. Lös ekvationssytemet

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 8y + 3z = -2 \\ 3x + 10y + 6z = 7 \end{cases}$$ (3p)

2. Bestäm alla extremvärden till funktionen $f(x,y) = (\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{b})$, då $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ är två givna vektorer, och $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. (3p)

3. Transformera andragradsekvationen

$$x^2 - 3xy + 5y^2 - \frac{1}{2} = 0$$

till huvudaxelform, och ange huvudaxlarnas riktning. (Rita kurvan). (3p)

4. Bestäm riktningsderivatan av funktionen

$$f(x,y,z) = \sin x + x^2 y + e^{2z}$$

i punkten $(0,0,0)$ i riktning mot punkten $(0,1,2)$. (3p)

5. Bestäm Taylorpolynomet av tredje graden till funktionen

$$f(x,y) = e^{-2xy}(1 + 2xy)$$

i origo. (3p)

6. Beräkna tangentplanet i punkten $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, 0)$ till ellipsoiden med halvaxlarna a, b, c (definierad, t.ex., med hjälp av ekvationen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$). (4p)

V.g. vänd!

7. Visa att funktionen

$$f : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

är lokalt inverterbar för alla $r > 0$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Beräkna Jacobimatrisen av

$$f^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}$$

i punkten $(x, y) = (2, 0)$. (4p)

8. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

genom att beräkna egenvärdena och 3 linjärt oberoende egenvektorer till A. (4p)

9. Bestäm alla lokala extremvärden (och deras karaktär) av funktionen

$$f(x, y) = 4(x-2)^2 + (y-3)^2$$

på cirkeln

$$\Gamma = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + y^2 - 6y + 12 = 0 \right\}.$$ (4p)

10. Visa att (rotations) matrisen

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varphi \cdot S + \varphi^2 \frac{S^2}{2!} + \cdots = E_{2\times 2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\varphi \cdot S)^k}{k!}$$

dvs som $e^{\varphi \cdot S}$, då $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bevisa att $R(\varphi) \cdot R(\theta) = R(\varphi + \theta)$ och $R(\varphi) \cdot R(\theta) \cdot R(-\varphi) = R(\theta)$ för godtyckliga $\varphi, \theta \in [0, 2\pi]$. (4p)