KTH Matematik

**Kontrollskrivning 1, lösnings förslag.**
**5B1116 Matematik II**
2 November, 2006

- tid:**10:15-11:15**
- Inga böcker/anteckningar får användas.
- **Allt ska motiveras.** Ett svar utan förklaring är värt 0 poäng!
- Minst 3 poäng krävs för godkänt.

(1) (2 p.) Bestäm, för varje värde på konstanten $a$, alla lösningar till systemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + ay + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Genom Guass-Jordan eliminering, om $a \neq 2$, får man precis en lösning:

$$\begin{cases} x = \frac{a^2+3a-7}{2(a-2)} \\ y = \frac{1-a}{(a-2)} \\ z = \frac{a^2-3a-+3}{2(a-2)} \end{cases}$$

Om $a = 2$ då blir den associerade matris lika med:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Och det betyder att systemet saknar lösningar.

(2) (4 p.) Låt $\vec{u} = (3, 1, 2), \vec{v} = (-3, 1, -2)$, med avseende till en ortonormerad bas.

(a) (2 p.) Bestäm en vektor som är vinkelrät mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

$\vec{u} \times \vec{v} = (-4, 0, 6)$ då är till exempel $(2, 0, -3)$ vinkelrät mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

(b) (2 p.) Bestäm $\tan(\alpha)$, där $\alpha$ är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -9 + 1 - 4 = -12, |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{52}$. Från $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\alpha)$ och $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\alpha)$ ser man att

$$\frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{\vec{u} \cdot \vec{v}} = \tan\alpha = -\frac{\sqrt{52}}{12}.$$

(3) (3 p.) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $(1, 1, -2)$ och $(0, 0, 3)$ samt är parallelt med en vektor som är ortogonal(vinkelrät) mot planet $2x + 3y + z - 3 = 0$. Alla koordinater är givna i en ortonormerad bas.
En vinkelrät vektor mot planet $2x + 3y + z - 3 = 0$ är given av $(2, 3, 1)$. En normal vektor till planet vi vill bestämma är då en vektor som ät parallell till:

$$((1, 1, -2) - (0, 0, 3)) \times (2, 3, 1) = (16, -11, 1)$$

Eknationen av planet genom $(0, 0, 3)$ och med normal $(16, -11, 1)$, är

$$16x - 11y + (z - 3) = 0.$$

Lycka till!