KTH Matematik

Kontrollskrivning 2
5B1116 Matematik II
10 November, 2006

- tid:**13:15-14:15**
- Inga böcker/anteckningar/räknare får användas.
- **Allt ska motiveras.** Ett svar utan förklaring är värt 0 poäng!
- Minst 3 poäng krävs för godkänt.

(1) (3 p.) Bestäm, för vilka värde på konstanten a, matrisen

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

är inverterbar och hitta inversen.

det $= -3(a-1) \neq 0$ om och endast om $a \neq 1$. Det betyder att matrisen är inverterbar om och endast om $a \neq 1$. Om $a \neq 1$, genom Jordan-Gauss eliminering får man:

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3(1-a)} & -\frac{a+1}{3(1-a)} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3(1-a)} & -\frac{a-2}{3(1-a)} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Då är inversen:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 0 \\ \frac{2}{3(1-a)} & -\frac{a+1}{3(1-a)} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3(1-a)} & -\frac{a-2}{3(1-a)} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(2) (3 p.) Låt (e_1, e_2, e_3) vara en bas till $\mathbb{R}^3$ och låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning sådan att:

$$F(e_1 + e_3) = e_2 + e_3,\ F(e_1) = e_2 + e_3,\ F(e_1 + e_2) = e_1.$$

(a) Bestäm matrisen för den linjära avbildningen F. (Matrisen menas med avseende till basen (e_1, e_2, e_3).) Eftersom F är linjär gäller att:

$$F(e_1 + e_3) = F(e_1) + F(e_3) = e_2 + e_3$$
$$F(e_1) = e_2 + e_3$$
$$F(e_1 + e_2) = F(e_1) + F(e_2) = e_1$$

Det följer att $F(e_3) = e_2 - e_3 - F(e_1) = 0$, och $F(e_2) = e_1 - F(e_1) = e_1 - e_2 - e_3$. Med koordinater i basen (e_1, e_2, e_3) har vi att:

$$F(e_1) = (0, 1, 1), F(e_2) = (1, -1, -1), F(e_3) = (1, -1, 0).$$

Matrisen skrivas som:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Bestäm $F(1, 3, 0)$.

$$F(1,3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = (3, -2, -2).$$

(3) (3 p.)Betrakta följande linjära system:

$$\begin{cases} \quad\quad\;\; y \quad\quad\quad\;\; + \; 3w = 1 \\ 3x \quad\quad\quad + \; z \; + \; 2w = 1 \\ 2x + 3y \quad\quad\quad + \; w = 1 \\ x + 2y + 3z \quad\quad\quad\; = 0 \end{cases}$$

(a) (1 p.) Skriv systemet på matrisform.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) (2 p.) Avgör om systemet har precis en lösning.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -88 \neq 0.$$

Detta innebär att systemet har precis en lösning.