KTH Matematik

Kontrollskrivning 3
5B1116 Matematik II
20 November, 2006

- tid:**8:15-9:15**
- Inga böcker/anteckningar/räknare får användas.
- **Allt ska motiveras.** Ett svar utan förklaring är värt 0 poäng!
- Minst 3 poäng krävs för godkänt.

(1) (3 p.) Betrakta funktionen $f(x,y) = \ln(\frac{x-3}{y-2})$.
(a) Bestäm och rita största definitionsmängd till f.
Funktionen är väldefinierad när $y \neq 2$ och $\frac{x-3}{y-2} > 0$. Definitions mängden är

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ där } (x > 3 \text{ och } y > 2) \text{ eller } (x < 3 \text{ och } y < 2)\}$$

(b) Avgör om mängden är öppen, sluten, begränsad, kompakt.
Granpunkterna till $D(f)$ ligger på linjerna $x = 3$ och $y = 2$, som inte ingår i $D(f)$.

$$\partial D(f) = (x = 3) \cup (y = 3)$$

Det följer att $D(f)$ är öppen, ej sluten, ej begränsad, ej kompakt.

(2) (3 p.)
(a) Bestäm tangentplanet till ytan $z = \ln(\frac{x-3}{y-2})$ i punkten $(2, 1, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x,y)=(2,1)} = \frac{1}{x-3}|_{(x,y)=(2,1)} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}_{(x,y)=(2,1)} = -\frac{1}{y-2}|_{(x,y)=(2,1)} = 1$$

Tangentplanet är:

$$z = 0 - (x - 2) + (y - 1) \quad z + x - y - 1 = 0.$$

(b) Avgör en normalvektor till ytans tangentplanet. Gradienten till $F(x,y,z) = z - \ln(\frac{x-3}{y-2})$ är normal till ytan i punkt $(2, 1, 0)$:

$$\nabla_F(2, 1, 0) = (1, -1, 1).$$

(3) (3 p.) Avgör om följande funktioner kan utvidgas så att de blir kontinuerliga i hela $\mathbb{R}^2$.

(a)

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Låt $l_1 : x = y$ och $l_2 : x = 0$.

$$f|_{l_1} = \frac{x^2}{2x_2},\ f_{l_2} = 0$$

Det följer att:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{l_1} = \frac{1}{2} \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{l_2} = 0,$$

som betyder att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ inte existerar och därför att $f(x,y)$ inte kan utvidgas så att den blir kontinuerlig.

(b)

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Med hjälp av koordinatbyte $x = r\cos(\alpha), y = r\sin(\alpha)$, ser man att, eftersom $-\frac{r^2}{r} < \frac{r^2 sin(2\alpha)}{r} < \frac{r^2}{r}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{r} = 0$$

Det följer att funktion:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{om} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{om} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

är kontinuerlig.