KTH Matematik

5B1307, Linjär algebra
Kontrollskrivning 4
Torsdagen November 28, 2006

- *Skrivtid:* **13:15-14:15.**
- Inga böker/anteckningar/räknare får användas.
- **Allt ska motiveras!** Ett svar utan förklaring är värt 0 poäng!
- Minsr 3 krävs för godsänt.

(1) (2 p.) Säg vilket påstående som gäller genom att kryssa K(Korrekt) eller F(Falsk). Låt A vara en $n \times n$ matris.

(1)	Om A är ortogonal då är A diagonaliserbar	F
(2)	Om A är symmetrisk då är A diagonaliserbar	K
(3)	Om A är ortogonal och symmetrisk då är $A^{-1} = A$	K
(4)	Om A har n stycken egenvektorer då är A diagonaliserbar	F

(2) Avgör för vilket värde på konstanten $a \in \mathbb{R}$ matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 4a^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

är diagonaliserbar.

$$\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)(\lambda - 2a)(\lambda + 2a).$$

När $\lambda = 1$, för varje $a \in \mathbb{R}$, då är egenvektorer alla vektorer på linjen $(t, 0, 0)$. Evenvärden är så $\lambda = 1, 2a, -2a$.

- om $a = \frac{1}{2}$ eller $a = -\frac{1}{2}$ då får van $\lambda = 1, -1$ som egenvärden. Egenvektorer till $\frac{1}{2}$ och $\lambda = -1$ är alla vektorer på linjen $(5t, -4t, 4t)$. Egenvektorer till $-\frac{1}{2}$ och $\lambda = -1$ är alla vektorer på linjen $(7t, -4t, 4t)$.
  Det följer att i sådana fall är A ej diagonalizerbar.
- Om $2a = -2a$, i.e. $a = 0$ då har A egenvärden $\lambda = 1, 0$. Egenvektorer till $\lambda = 0$ är alla vektorer på linjen $(-3t, 0, t)$. Det följer att i sådant fall är A ej diagonalizerbar.
- Om $a \neq 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ har A tre olika egenvärde som betyder att matrisen är diagonaliserbar.

(3) Skriv ytan:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - 4yz + 2x = 0$$

på huvudaxelform (kanonisk form) och beskriv ytan geometriskt (se bifogad tabell).

Den kvadratiska formen $x^2+2y^2+z^2-8xy-4yz$ har som associerad matris:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A-\lambda I_3) = (\lambda-1)(\lambda-6)(\lambda+3)$, Detta betyder att egenvärden är $1, 6, -3$. En ortonormerad bas av egenvektorer (en till varje egenvärde) är:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2), \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,-5,2), \frac{1}{3}(2,2,1)$$

Genom basbytet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

får man:

$$x'^2 + 6y'^2 - 3z'^2 + 2(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{3\sqrt{5}}y' + \frac{2}{3}z') = 0$$

Detta är lika med:

$$(x' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + 6(y' + \frac{4}{18\sqrt{5}})^2 - 3(z' - \frac{2}{9}) + (-\frac{1}{5} - \frac{8}{3\cdot 9\cdot 5} + \frac{4}{3\cdot 9}) = 0.$$

Låt $x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y'' = y' + \frac{4}{18\sqrt{5}}$, $z'' = z' - \frac{2}{9}$. Då har vi den kanoniska formen:

$$x''^2 + 6y''^2 - 3z''^2 = \frac{1}{9}.$$

Detta är en hyperboloid.