KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

27 Oktober, 2006

Contents

1.	Vektorer	1
2.	Vector-Operationer	1
3.	Egenskaper	1
4.	Bas i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$	2
5.	Skalär produkt	2

1. Vektorer

En vektor är en riktad sträka $\vec{v} = \vec{AB}$, där A kallas startpunkt och B kallas ändpunkt.

Med $|AB| = |\vec{v}|$ betecknar vi längden av $\vec{v}$.

En noll vektor, $\vec{0}$, är en vektor av längd 0,

Två vektorer ($\neq \vec{0}$) sägs vara lika om de har samma längd och samma riktning.

2. Vector-Operationer

- Om $\vec{v} = \vec{AB}, \vec{w} = \vec{DE}$ då är $v \vec{+} w = \vec{AC}$ där C är den punkten så att $\vec{BC} = \vec{DE}$.
- Om $\vec{v} = \vec{AB}$ då är $\vec{-v} = \vec{BA}$.
- Om $\vec{v} = \vec{AB}$ och $k \in \mathbb{R}$ då är

$$k\vec{v} : \begin{cases} \text{om } k > 0 & \text{har } k\vec{v} \text{ samma riktning som } \vec{v} \text{ och } |k\vec{v}| = k|\vec{v}| \\ \text{om } k = 0 & k\vec{v} = \vec{0} \\ \text{om } k < 0 & \text{har } k\vec{v} \text{ samma riktning och som } \vec{-v} \text{ och } |k\vec{v}| = k|\vec{v}| \end{cases}$$

- $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (\vec{-w})$.

3. Egenskaper

- $\vec{u} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{u}$.
- $(\vec{u} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{u} + (\vec{w} + \vec{u})$.
- $k(\vec{u} + \vec{w}) = k\vec{u} + k\vec{w}$.
- $(k + t)\vec{v} = k\vec{v} + t\vec{v}$.
- $k(t\vec{v}) = kt\vec{v}$.

4. Bas i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$

Två vektorer är parallela om de har samma riktning.

Given en vektor $\vec{v}$ då ligger alla multipler $k\vec{v}$ på linjen genom $\vec{v}$.

Kom ihåg att två linjer i $\mathbb{R}^3$ alltid ligger på ett gemensamt plan. Tre linjer i $\mathbb{R}^3$ är komplana om de ligger på ett gemensamt plan.

- Låt l_1, l_2 vara två linjer i $\mathbb{R}^2$, som inte är parallela, då kan alla vektorer $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ skrivas som
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ där } \vec{v}_1 \in l_1, \vec{v}_2 \in l_2.$$
- Låt l_1, l_2, l_3 vara tre linjer i $\mathbb{R}^3$, som inte är koplana. Då kan alla vektorer $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ skrivas som
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \text{ där } \vec{v}_1 \in l_1, \vec{v}_2 \in l_2, \vec{v}_3 \in l_3.$$

Med en *bas* i $\mathbb{R}^2$ menas två vektorer $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, som inte är parallela. Med en *bas* till $\mathbb{R}^3$ menas tre vektorer $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, som inte är komplanara.

Given en bas $B = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ och $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ då har vi att:
$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$
$(a_1, ..., a_n)$ är koordinaterna till $\vec{v}$.

5. Skalär produkt

Om $\vec{u}, \vec{v}$ är givna vektorer och vinkeln mellan dem är θ, sådefinieras skalära produkten som:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |u||v|\cos(\theta) & \text{om } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ och } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{om } \vec{u} = \vec{0} \text{ eller } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$
Vi säger att två vektorer $\vec{v}, \vec{u}$är ortogonala om $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$. Vi kallar en bas $B = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ortonormal om $|\vec{e}_i| = 1$ och $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$.

- om $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\vec{u} = (x_2, y_2, z_2)$, med avseende till någon ortonormal bas till $\mathbb{R}^3$, då är $\vec{v} \cdot \vec{u} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
- $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$.
- $k(\vec{v} \cdot \vec{u}) = (k\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (k\vec{u})$.
- $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot u = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.
- den ortogonala projektionen av en vector $\vec{a}$ på en vektor $\vec{b}$ definieras som
$$\vec{a}_b = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|b|^2}\vec{b}.$$