KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

31 Oktober, 2006

Contents

1. Determinant till en matris

- Låt A vara en 2×2 matris:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - cb$$

- Låt A vara en 3×3 matris:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad \det(A) = a_1 \det\begin{pmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \det\begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

2. Kryssprodukt

Låt $\vec{a}$ och $\vec{b}$ vara givna vektorer. Den vektoriella produkten eller *kryssprodukt* $a \vec{\times} b$ definieras som vektorn sådan att:

- Om $\vec{a} = \vec{0}$ eller $\vec{b} = \vec{0}$ då är $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- Annars har $\vec{a} \times \vec{b}$:
  riktningen (se Fig. (1)) : placera tummen (från höger hand) på vektor a och pekfingern på b, sedan peka din mellan fingern vinkelrät till tumman och pekfingern.
  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\theta)$, där θ är vinkel mellan $\vec{a}$ och $\vec{b}$.

Geometrisk tolkning: Den parallelogram, som spannas up av $\vec{a}$ och $\vec{b}$, har arean $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

3. Egenskaper

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{b})$.
- $(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times k\vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$.
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ om $\vec{a}$ är parallel till $\vec{b}$.

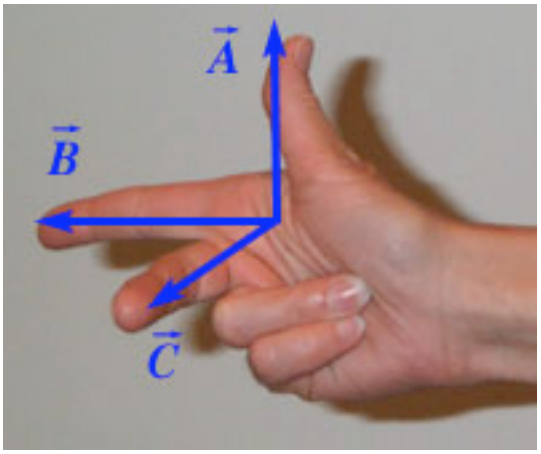

FIGURE 1.

- Låt $B = e_1, e_2, e_3$ vara en ortonormerad bas till $\mathbb{R}^3$ och låt $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)_B, \vec{b} = (y_1, y_2, y_3)_B$ då $\vec{a} \times \vec{b}$ givs av:
  $\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ $\vec{a} \times \vec{b} = (x_2y_3 - y_2x_3, -x_1y_3 + y_1x_3, x_2y_3 - x_3y_2)_B$.

4. Trippelprodukt

Den (skalära) trippelprodukt av $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ definieras som:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Låt $B = e_1, e_2, e_3$ vara en ortonormerad bas till $\mathbb{R}^3$ och låt $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)_B, \vec{b} = (y_1, y_2, y_3)_B, \vec{c} = (z_1, z_2, z_3)_B$, då $a \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ givs av:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Geometrisk tolkining:

- Om $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ är koplana då är $a \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
- Annars är $a \cdot (\vec{b} \times \vec{b})$ lika med volymet av den parallelepiped som späns up av $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Det gäller att:

$$a \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = b \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = c \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$