KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

1 November, 2006

Contents

1. Cramer regeln

- Systemet

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}$$

har precis en lösning om

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Lösningen är

$$\left(\frac{\det \begin{pmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{pmatrix}}{D}, \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{pmatrix}}{D} \right)$$

- Systemet

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

har precis en lösning om

$$D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

Lösningen är

$$\left(\frac{\det \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}{D}, \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix}}{D}, \frac{\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}}{D} \right)$$

2. Linjer och plan

- Linjen i $\mathbb{R}^2$ genom (x_0, y_0) och prallel med vektor (a, b) har parametrisk ekvation:
$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{cases}$$
Ekvationen kan skrivas i form $Ax + By + D = 0$, där (A, B) ger en normal vektor (vektor som är ortogonal till linjen).
- Linjen i $\mathbb{R}^3$ genom $\vec{v_0} = (x_0, y_0, z_0)$ och prallel med vektor $\vec{v} = (a, b, c)$ har parametrisk ekvation:
$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{cases}$$
På en kompakt form: $l = \vec{v_0} + t\vec{v}$.
- Planet i $\mathbb{R}^3$ genom (x_0, y_0, z_0) och med normal vektor (A, B, C) ges av ekvationen
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$
Detta kan skrivas som $Ax + By + Cz + D = 0$.

3. Avstånd

- Låt $P = (x_1, y_1)$ vara en punkt i $\mathbb{R}^2$. Avståndet mellan P och linjen $Ax + By + D = 0$ är
$$\frac{Ax_1 + By_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$
- Låt $P = (x_1, y_1, z_1)$ vara en punkt i $\mathbb{R}^3$. Avståndet mellan P och planet $Ax + By + Cz + D = 0$ är
$$\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$
- Låt $l_1 = \vec{r_1} + t\vec{v_1}, l_2 = \vec{r_2} + t\vec{v_2}$ vara två linjer i $\mathbb{R}^3$. Avståndet mellan dem är lika med:
$$\frac{|(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2})|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}$$