KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

13 November, 2006

Contents

1. Reellvärda unktioner

En Yta i $\mathbb{R}^3$ kan representeras som bilden av en funktion:

$$Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^k \;\; Y(s,t) = (X_1(s,t), ..., x_k(s,t)).$$

Ytan spänns up av kurvorna $Y(a,t), Y(s,b)$ för varje $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

2. Koordinatbyten

Ibland är det bra att ändra koordinater (byta basen), med fleravariablerfunktioner. En koordinatbyte kan representeras med en function. Till example:

$$(r, \alpha) \mapsto (r\cos(\alpha), r\sin(\alpha) = (x, y)).$$

Genom den här funktionen går linjerna $(r = a)$ till cirklarna $(x^2 + y^2 = a^2)$.

3. Gränsvärden

Låt $f : D \to \mathbb{R}^k, D \subset \mathbb{R}^n$, vara en vektorvärd funktion, och låt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^k$. Vi säger att:

$$\lim_{\vec{x}\to a} f(\vec{x}) = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \text{för varje } K(\vec{b}, \epsilon) \text{ det finns någon } K(\vec{a}, \delta) \text{ så att } x \in K(\vec{a}, \delta) \Rightarrow f(x) \in K(\vec{b}, \epsilon)$$

$$\lim_{\vec{x}\to \infty} f(\vec{x}) = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \text{för varje } K(\vec{b}, \epsilon) \text{ det finns någon } K(\vec{a}, R) \text{ så att } x \notin K(\vec{a}, R) \Rightarrow f(x) \in K(\vec{b}, \epsilon)$$

Det är relativt lätt att visa att visst gränsvärde inte existerar, genom att betrakta ulika kurvor (ex. linjer) nära punkten $\vec{a}$. Restriktionen av funktionen till kurvorna blir en funktion i en variabel. Om dessa envariabel funktioner har olika gränsvärden, säger vi att gränsvärden av funktionen INTE EXISTERAR:

Låt $K_1, K_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ vara två kurvor med $K_1(t_o) = K_2(t_o) = \vec{a}$.

$$\lim_{t\to t_o} K_1(t) \neq \lim_{t\to t_o} K_2(t) \ \Rightarrow \lim_{\vec{x}\to a} f(\vec{x}) \text{ EXISTERAR INTE}$$

4. Räkneregler

Låt $f : D_1 \to \mathbb{R}^k, g : D_1 \to \mathbb{R}^k$ och $\vec{a} \in D_1, \vec{a} \in D_2$.

- $\lim_{\vec{x}\to a}(f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to a} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to a} g(\vec{x})$.
- $\lim_{\vec{x}\to a}(f(\vec{x})g(\vec{x})) = (\lim_{\vec{x}\to a} f(\vec{x}))(\lim_{\vec{x}\to a} g(\vec{x}))$.
- Om $g(x) \neq 0$ för $x \in K(a, \delta)$,

$$\lim_{\vec{x}\to a}(\frac{f(\vec{x})}{f(\vec{x})}) = \frac{\lim_{\vec{x}\to a} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x}\to a} g(\vec{x})}.$$

- Om $g(x) \leq f(x) \geq h(x)$ för $x \in K(a, \delta)$,

$$\lim_{\vec{x}\to a} g(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to a}(h(\vec{x})) = \vec{b} \Rightarrow \lim_{\vec{x}\to a}(f(\vec{x})) = \vec{b}.$$

5. L'Hopitals regel

För att bestämma gränsvärden till en vektorvärdfunktion använder vi ofta restriktioner så att reducerar vi undersökningen till en variabel.

L'Hopital regeln utgör ett effektivt sätt för att beräkna vissa lim.

- Regel för $\frac{0}{0}$, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \lim_{x\to a}(f(x)) = \lim_{x\to a}(g(x)) = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \lim_{x\to\infty}(f(x)) = \lim_{x\to\infty}(g(x)) = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{array}.$$

- Regel för $\frac{\infty}{\infty}$, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \lim_{x\to a}(f(x)) = \lim_{x\to a}(g(x)) = \infty \ \Rightarrow \ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \lim_{x\to\infty}(f(x)) = \lim_{x\to\infty}(g(x)) = \infty \ \Rightarrow \ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{array}.$$